Arthur Lannuzel

AAC1 : Travail à rendre le 23 octobre 2020

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1

Soit l'application

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & f(V) = x + 2y \end{array}$$

1) Cette application est-elle injective ? surjective ?
2) Quelle est l'ensemble E_0 des antécédents de 0 par f ?
3) Soit la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$V_1 \mathcal{R} V_2 \Longleftrightarrow V_1 - V_2 \in E_0.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
4) Quelle est la classe d'équivalence de $(1,1) \in \mathbb{R}^2$ pour $\mathcal{R}$?

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$:
$|x - y| - |x + y| = 2.$

TOURNER LA PAGE SVP

Exercice 3

Soit la suite définie par récurrence ($a \in \mathbb{R}_+$ fixé) :

$$\begin{cases} u_0 & \in & \mathbb{R}_+^* \\ u_{n+1} & = & \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}) \end{cases}$$

On se propose de montrer que u_n tend vers $\sqrt{a}$.

1) vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.

2) Montrer que $u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4.u_n^2}$.

3) Montrer que pour $n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{a}$.

4) Montrer que $(u_n)_n$ est décroissante. En déduire que $(u_n)_n$ est convergente.

5) Montrer que la limite de $(u_n)_n$ est $\sqrt{a}$.

6) En utilisant la relation $u_{n+1}^2 - a = (u_{n+1} - \sqrt{a}).(u_{n+1} + \sqrt{a})$, Montrer que

$$u_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2.\sqrt{a}}(u_n - \sqrt{a})^2.$$

7) Si $u_0 - \sqrt{a} \leq 1$, déduire de 6) une majoration de la différence $u_n - \sqrt{a}$ ($n \geq 1$) en fonction de n et $\sqrt{a}$.

8) Prenons $u_0 = 3$ et $a = 10$. Grâce à l'encadrement $3 \leq \sqrt{a} \leq 4$, montrer que u_4 nous donne $\sqrt{10}$ avec une précision d'au moins 6 chiffres ?