Arthur Lannuzel

AAC2 : Travail à rendre le 11 janvier 2021

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1

On se propose dans cet exercice de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :
(i) $\forall z \in \mathbb{R},\ f(z) = z$.
(ii) $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ f(z + z') = f(z) + f(z')$.
(iii) $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ f(z \times z') = f(z) \times f(z')$.

1. Vérifier que les fonctions définies par $f(z) = z$ et $f(z) = \bar{z}$ sont solutions du problème.
2. Réciproquement soit f une fonction du problème.
   (a) Démontrer que $f(i) = i$ ou $f(i) = -i$.
   (b) On suppose que $f(i) = i$. Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = z$.
   (c) On suppose que $f(i) = -i$. Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$.
3. Qu'a-t-on démontré dans cet exercice ?

Exercice 2

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ pour que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$.

Exercice 3

Soit f la fonction $x \mapsto \arcsin\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Donner son domaine de définition, son domaine de dérivabilité, puis étudier et tracer la fonction.

TOURNER LA PAGE SVP

EXERCICE 4

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $[a,b]$ vérifant $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f' > 0$ et $f'' > 0$.

1. Démontrer qu'il existe un unique $\gamma \in]a,b[$ tel que $f(\gamma) = 0$.
2. On pose $x_0 = b$. Déterminer l'abscisse x_1 du point d'intersection de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 avec l'axe des abscisses. Justifier que $x_1 \in [\gamma, b]$.
3. On réitère le procédé et on construit ainsi une suite (x_n) vérifiant la relation de récurrence $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ avec $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Démontrer que la suite (x_n) converge vers γ.
4. On souhaite estimer la vitesse de convergence de (x_n) vers γ.
   (a) Justifier que, pour tout $x \in [a,b]$, on a
   $$|f(\gamma) - f(x) - f'(x)(\gamma - x)| \leq \frac{\max_{[a,b]} |f''|}{2} |x - \gamma|^2.$$
   (b) En déduire que
   $$|x_{n+1} - \gamma| \leq k|x_n - \gamma|^2 \text{ avec } k = \frac{1}{2} \frac{\max_{[a,b]} |f''|}{\min_{[a,b]} |f'|}.$$
5. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, on a : $k|x_n - \gamma| \leq (k|x_0 - \gamma|)^{2^n}$.
6. Application numérique : montrer que la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3$ vérifie les conditions d'application des résultats précédents avec $a = 1,7$ et $b = 1,8$. En déduire une méthode pour calculer une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^{-20} près. Qu'en pensez-vous ?