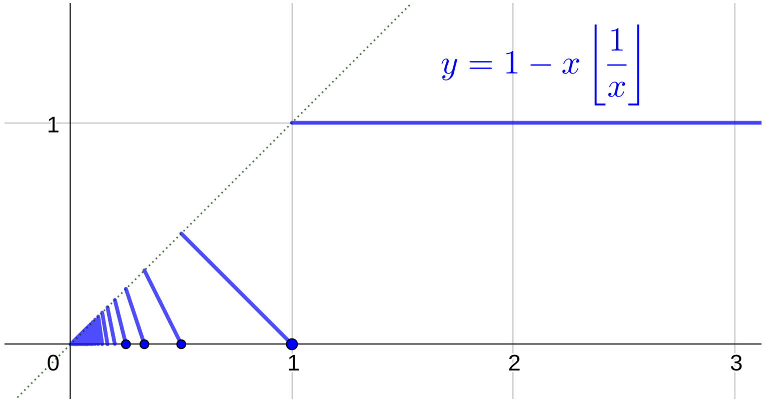
Exercice 1

$\forall\, x \in]0\,,\,+\infty[\,, \qquad f(x) = 1 - x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$



1.
   - Soit x un réel tel que $x > 1$. Alors $0 < \dfrac{1}{x} < 1$ d'où $\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor = 0$ puis $f(x) = 1$
   - $f(1) = 1 - 1 \times \left\lfloor \dfrac{1}{1} \right\rfloor = 1 - 1 \times 1 = 0$
   - La fonction f **n'est pas continue en 1** car $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1 \neq f(1)$

2. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. On rappelle que $\forall\, t \in \mathbb{R},\ t - 1 < \lfloor t \rfloor \leqslant t$.
   D'où $\dfrac{1}{x} - 1 \leqslant \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \dfrac{1}{x}$. Donc $x\left(\dfrac{1}{x} - 1\right) \leqslant x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \leqslant x\,\dfrac{1}{x}$

   Donc $-1 + x \geqslant -x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \geqslant -1$. Ainsi $\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}$ $\boxed{0 \leqslant f(x) \leqslant x}$

   Or $\lim\limits_{x \to 10^+} x = 0$.
   Le *théorème des gendarmes* permet de conclure que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+ = [0\,,\,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln(1 + x) + n\,x - 1$$

1. (a) Soient a et b deux réels tels que $0 \leqslant a < b$.

   Alors $1 \leqslant 1 + a < 1 + b$. Comme la fonction ln est **strictement** croissante sur $[1\,,\,+\infty[$, on en déduit que $\ln(1 + a) \underset{(\star)}{<} \ln(1 + b)$.

   De plus $n \geqslant 0$. D'où $n\,a \leqslant n\,b$ puis $n\,a - 1 \underset{(\star\star)}{\leqslant} n\,b - 1$.

   En ajoutant membre à membre les inégalités $(\star)$ et $(\star\star)$, on obtient $\ln(1 + a) + n\,a - 1 < \ln(1 + b) + n\,b - 1$.

   Ainsi $\forall\,(a, b) \in [0\,,\,+\infty[^2\ ,\ \big(a < b \Longrightarrow f(a) < f(b)\,\big)$ ce qui signifie, par définition, que f_n est **strictement croissante** sur $[0\,,\,+\infty[$.

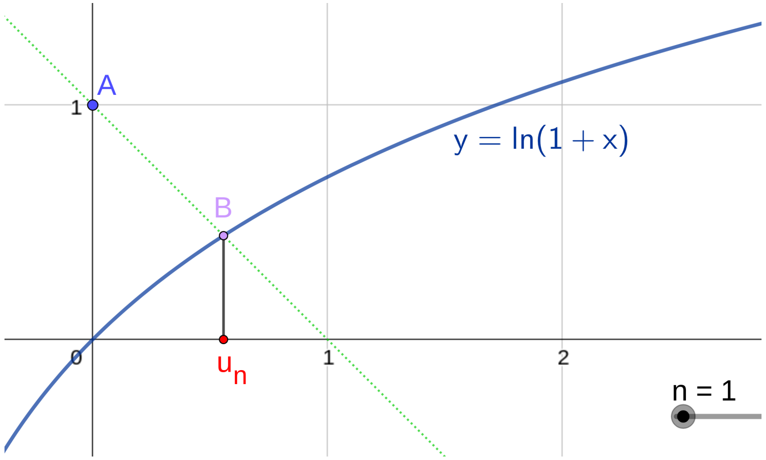
   (b) f_n est la somme des deux fonctions $u : x \mapsto \ln(1 + x)$ et $v : x \mapsto n\,x - 1$.

   u et v étant continues sur $\mathbb{R}^+$, la fonction f_n est **continue** sur l'**intervalle** $[0\,,+\infty[$. Elle est de plus **strictement** croissante sur $[0\,,+\infty[$.
   Or $f_n(0) = \ln(1) - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$. On en déduit, d'après le *théorème de la bijection*, que f_n est bijective de $[0\,;+\infty[$ sur l'intervalle image :

   $$f_n\left([0\,;+\infty[\right) = \left[f_n(0)\,,\ \lim_{x \to +\infty} f_n(x)\right[= [-1\,,\,+\infty[$$

   (c) L'intervalle image $f_n\left([0\,;+\infty[\right)$ contient zéro. Donc 0 admet un unique antécédent u_n par f_n dans l'intervalle $[0\,,\,+\infty[$ ce qui revient à dire que l'équation d'inconnue x, $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n dans l'intervalle $\mathbb{R}^+$. Nous pouvons écrire : $\boxed{u_n = f_n^{-1}(0)}$

   On retiendra que $f_n(u_n) = 0$ et que $0 \leqslant u_n$.



2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors
$f_n(1/n) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + n\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + 1 - 1 = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
Or $\frac{1}{n} > 0 \Longrightarrow 1+\frac{1}{n} > 1 \Longrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \ln 1$. Donc $f_n(1/n) > 0$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On déjà a vu en 1.(c) que , $0 \leqslant u_n$.
De plus d'après 2.(a), $0 \leqslant f_n\left(\frac{1}{n}\right)$.
D'après le *théorème de la bijection*, la réciproque de f_n a le même sens de variation que f_n.
Donc la réciproque f_n^{-1} est croissante sur $f_n([0;+\infty[) = [-1, +\infty[$.
Donc $0 \leqslant f_n\left(\frac{1}{n}\right) \Longrightarrow \underbrace{f_n^{-1}(0)}_{u_n} \leqslant \underbrace{(f_n^{-1}\circ f_n)}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^+}}\left(\frac{1}{n}\right) \Longrightarrow u_n \leqslant \frac{1}{n}$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0^+$
Le *théorème des gendarmes* permet de conclure que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+}$

(d) On rappelle que pour tout entier naturel n, $f_n(u_n) = 0$

c.à.d. $\ln(1+u_n)+n\,u_n-1 = 0$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $n\,u_n = 1-\ln(1+u_n)$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0} \ln(1+t) = \ln 1 = 0$
D'où, par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1+u_n) = 0$
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\ln(1+u_n) = 1$

Finalement $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n\,u_n = 1$ et $\boxed{u_n \underset{(n\longrightarrow+\infty)}{\sim} \frac{1}{n}}$

Exercice 3

1. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ avec $a < b$. Alors il existe au moins un réel $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$$

2. On se fixe un réel x appartenant à $[0, 1]$.

- 1er cas : supposons $x > 0$. On applique le *théorème des accroissements finis* en prenant $f = \exp$, $a = 0$ et $b = x$. La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, a fortiori continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$.
Donc il existe $c \in]0, x[$ tel que $e^x - e^0 = \exp'(c)\,(x-0)$

c'est-à-dire $\boxed{e^x - 1 = x\,e^c}$

Or $c \in]0, x[\Rightarrow 0 \leqslant c \leqslant 1 \Rightarrow e^0 \leqslant e^c \leqslant e^1 \Rightarrow 1 \leqslant e^c \leqslant e \Rightarrow x \leqslant x\,e^c \leqslant x\,e$
Donc $x \leqslant e^x - 1 \leqslant x\,e$
- 2ème cas : supposons $x = 0$. Alors $e^x - 1 = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ et $x\,e = 0$.
Donc l'encadrement $x \leqslant e^x - 1 \leqslant x\,e$ reste valable dans ce cas trivial.

Exercice 4

On se fixe un entier naturel n supérieur à 2 et on considère le polynôme $P_n(X) \in \mathbb{R}[X]$ défini par :

$$P_n(X) = (X-1)^n - 1$$

1. D'après la *formule du binôme*, $(X-1)^n = \big(X + (-1)\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^k$

   D'où $P_n(X) = (X-1)^n - 1 = -1 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^k$

   $$\text{Donc} \quad P_n(X) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^k & \text{si } n \text{ est pair} \\ -2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^k & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

   $\binom{n}{n} (-1)^{n-n} = 1 \neq 0 \quad$ donc $\quad \boxed{\deg\big(P_n(X)\big) = n}$

2. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. D'après l'une des *formules d'Euler* : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

   D'où $2\cos(\theta)\, e^{i\theta} = 2\left(\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right) e^{i\theta} = \left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) e^{i\theta}$
   $= e^{i\theta} e^{i\theta} + e^{-i\theta} e^{i\theta} = e^{i(\theta+\theta)} + e^{i(-\theta+\theta)} = e^{i\,2\theta} + e^0 = 1 + e^{i\,2\theta}$

   (b) Les racines $n-$ièmes de l'unité sont les n nombres complexes deux à deux distincts :

   $$e^{i\,\frac{2k\pi}{n}} \qquad \text{où } k \in [\![0\,,\, n-1]\!]$$

   (c)

   $$\begin{aligned} (z-1)^n = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, k \in [\![0\,,\, n-1]\!] \ ; \ z - 1 = e^{i\,\frac{2k\pi}{n}} \quad \text{d'après le rappel ci-dessus} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, k \in [\![0\,,\, n-1]\!] \ ; \ z = 1 + e^{i\,\frac{2k\pi}{n}} \end{aligned}$$

   L'équation $(z-1)^n = 1$ admet exactement n solutions : les nombres $\boxed{\alpha_k = 1 + e^{i\,\frac{2k\pi}{n}}}$ pour $k \in [\![0\,,\, n-1]\!]$.

   (d) Les racines complexes (éventuellement réelles) du polynôme $P_n(X)$ sont les solutions de l'équation d'inconnue z : $(z-1)^n - 1 = 0$. Donc $P_n(X)$ admet n racines deux à deux distinctes, à savoir les nombres complexes α_k.

   $$\alpha_k = 1 + e^{i\,2\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = 2\cos\left(\frac{k\,\pi}{n}\right) e^{i\,\frac{k\,\pi}{n}} \quad \text{d'après la question 2.(a)}$$

3. (a) On connaît les racines du polynôme $P_n(X)$ et son coefficient dominant qui est égal à 1. Donc

   $$P_n(X) = 1 \prod_{k=0}^{n-1} (X - \alpha_k) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - 2\cos\left(\frac{k\,\pi}{n}\right) e^{i\,\frac{k\,\pi}{n}}\right)$$

   (b) On déduit de la question précédente que

   $$P_n(0) = \prod_{k=0}^{n-1} (0 - \alpha_k) = \prod_{k=0}^{n-1} (-\alpha_k) = \prod_{k=0}^{n-1} (-1)\,\alpha_k = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \alpha_k$$

   On a défini initialement $P_n(X)$ par $P_n(X) = (X-1)^n - 1$.

   Donc $P_n(0) = (-1)^n - 1 = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

   On en déduit le produit des n racines du polynôme $P_n(X)$:

   $$\prod_{k=0}^{n-1} \alpha_k = \frac{P_n(0)}{(-1)^n} = \frac{(-1)^n - 1}{(-1)^n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$