Examen final - AAE1/2

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation de toute calculatrice, de tout matériel électronique et de tout formulaire est interdite.
Chaque étudiant rendra deux copies différentes : une première pour AAE1 (exercices 1 et 2) et une seconde pour AAE2 (exercices 3 et 4).

Exercice 1 : AAE1 (3 points)

On désigne par $\lfloor t \rfloor$ la partie entière d'un nombre réel t.
On définit la fonction f sur l'intervalle ouvert $]0\,,\,+\infty[$ par

$$f(x) = 1 - x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

1. Simplifier l'expression de $f(x)$ lorsque $x > 1$. Calculer $f(1)$. f est-elle continue en 1 ?
2. Déterminer par encadrement, la limite de f en 0^+.

Exercice 2 : AAE1 (7 points)

Pour tout entier naturel n, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+ = [0\,,\,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln(1+x) + n\,x - 1$$

1. (a) Étudier le sens de variation de la fonction f_n sur $[0\,,\,+\infty[$.
   (b) Montrer que f_n est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   (c) En déduire que l'équation d'inconnue x : $\ln(1+x) = 1 - n\,x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$. Cette solution, qui dépend de n, sera notée u_n dans la suite de l'exercice.
2. On se propose d'étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner le signe de $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$
   (b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$
   (c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   (d) Prouver que $u_n \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{n}$

Exercice 3 : AAE2 (3 points)

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. En utilisant ce théorème, démontrer que pour tout réel x appartenant à $[0\,,\,1]$,

$$x \leqslant \mathrm{e}^x - 1 \leqslant x\,\mathrm{e}$$

Exercice 4 : AAE2 (7 points)

Dans cet exercice, on se fixe un entier naturel n supérieur à 2 et on considère le polynôme $P_n(X) \in \mathbb{R}[X]$ défini par :

$$P_n(X) = (X-1)^n - 1$$

1. À l'aide de la formule du binôme de Newton, donner l'écriture développée de $P_n(X)$.
   On utilisera le symbole de sommation $\sum$.

   Quel est le degré de $P_n(X)$?
2. (a) Vérifier que, pour tout nombre réel θ, $\quad 1 + \mathrm{e}^{i\,2\theta} = 2\,\cos(\theta)\,\mathrm{e}^{i\,\theta}$
   (b) Rappeler les racines $n-$ièmes de l'unité sous forme exponentielle.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $\quad (z-1)^n = 1$
   (d) En déduire les racines complexes du polynôme $P_n(X)$ sous la forme $\lambda\,\mathrm{e}^{i\,\theta}$ où λ et θ sont des réels (λ n'étant pas nécessairement positif).
3. (a) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P_n(X)$ en produit de polynômes de degré 1.
   On utilisera le symbole du produit $\prod$.
   (b) Calculer $P_n(0)$ de deux façons différentes.
   En déduire le produit des n racines du polynôme $P_n(X)$.