le 2 Juillet 2021 UTBM MT-AAH
Arthur LANNUZEL

AAH1 : Travail à rendre

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la rédaction correcte des démonstrations.

Exercice 1 *On considère la fonction* $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

1. *Déterminer deux réels* a *et* b *tels que, pour tout* $x \in [1,2]$*, on a :* $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$.
2. *Déduire de la question précédente la valeur de l'intégrale* $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$.
3. *Calculer l'intégrale* $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 *Soit la fonction*

$$f : \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2},0[\cup]0,\frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\arctan(x)}{(\sin(x))^3} - \frac{1}{x^2} \end{array}$$

1) Montrer que f *peut se prolonger par continuité en* 0 *en posant* $f(0) = \frac{1}{6}$*. Justifier.*

2) Montrer que le développement limité de $(\sin(x))^3$ *en* 0 *à l'ordre* 8 *est*

$$(\sin(x))^3 = x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{13}{120}x^7 + x^8\epsilon_1(x))$$

avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_1(x) = 0$.

3) En déduire le développement limité en 0 *à l'ordre* 5 *de* $\frac{x^3}{(\sin(x))^3}$ *et montrer que*

$$\frac{1}{(\sin(x))^3} = \frac{1}{x^3}.(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{17}{120}x^4 + x^5\epsilon_2(x))$$

avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_2(x) = 0$.

4) En déduire que le développement limité en 0 *à l'ordre* 2 *de* f *est*

$$\frac{\arctan(x)}{(\sin(x))^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{6} + \frac{7}{40}x^2 + x^2\epsilon_3(x))$$

avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_3(x) = 0$.

5) En déduire la position de la courbe de f *par rapport à sa tangente en* 0.

Exercice 3 *Pour quelles valeurs du paramètre t la matrice suivante est-elle inversible ? Dans ce cas, déterminer son inverse.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 *On considère dans $\mathbb{R}^4$:*

$$\begin{array}{lll} v_1 = (1,3,-2,2) & v_2 = (2,7,-5,6) & v_3 = (1,2,-1,0) \\ w_1 = (1,3,0,2) & w_2 = (2,7,-3,6) & w_3 = (1,1,6,-2). \end{array}$$

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par (v_1, v_2, v_3) et G celui engendré par (w_1, w_2, w_3).

1. *Donner une base de F.*
2. *Donner une base de G.*
3. *En déduire une base de $F + G$.*
4. *Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4;\ 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\}$. Donner une base de E.*
5. *Montrer que $F + G = E$. La somme est-elle directe ? Quelle est la dimension de $F \cap G$?*
6. *Donner une base de $F \cap G$.*