Examen final
AAG, AAI, AAJ, AAL

La présentation, la lisibilité et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le barème tient compte de la longueur de l'énoncé.
L'utilisation de la calculatrice est interdite. Aucun document n'est autorisé. L'exercice 1 sera rendu sur une copie différente des trois derniers exercices.

Exercice 1 : développements limités (5 points)

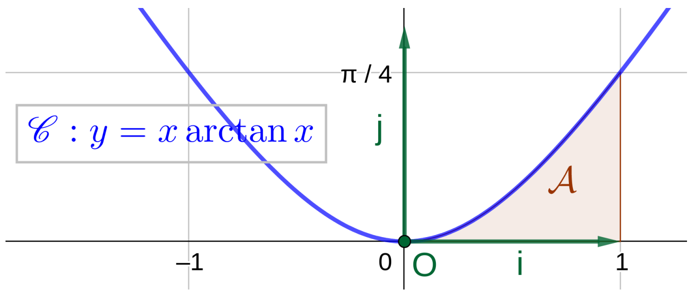
1. (a) Rappeler le développement limité à l'ordre 4 en zéro de la fonction $x \mapsto \cos x$.
   (b) Rappeler le développement limité à l'ordre 2 en zéro de la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+u}}$.
2. (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de zéro, de la fonction
$$f \;:\; x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \cos x.$$
   (b) En déduire l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f au point $O(0,0)$. Préciser la position locale de $\mathscr{C}$ par rapport à (T) au voisinage du point O.

Pensez à changer de copie

Exercice 2 : calcul intégral (6 points)

Les deux questions sont indépendantes.

1. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j}\right)$. On note $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $y = x\ \arctan x$.



Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la surface située en dessous de la courbe $\mathscr{C}$, au dessus de l'axe des abscisses $(O\,;\overrightarrow{i}\,)$ et entre les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
On pourra effectuer une intégration par parties et on remarquera que :
$\dfrac{x^2}{1+x^2} = \dfrac{(x^2+1)-1}{1+x^2}$.

2. En effectuant le changement de variable $u = \sqrt{x}$, calculer l'intégrale suivante :
$$I = \int_{1/4}^{3/4} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 3 : commutant d'une matrice (4 points)

On se donne la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et on désigne par F l'ensemble des matrices M de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.

1. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
2. On pose $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ où x, y, z et t sont des nombres réels.
   (a) En résolvant un système linéaire d'inconnues x, y, z, t, déterminer la forme des matrices M appartenant à F.
   (b) En déduire une base de F.

Exercice 4 : étude d'un endomorphisme (5 points)

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E & \longrightarrow & E \\ & P & \longmapsto & P'' - \dfrac{1}{3} X\, P' + P. \end{array}$$

On admet que φ est à valeurs dans E.

1. (a) Donner sans justification la dimension de E.
   (b) Prouver que φ est une application linéaire.
2. (a) Écrire la matrice A de φ dans la base canonique $\mathscr{B} = (1\,,\, X\,,\, X^2\,,\, X^3)$ de E.
   (b) Calculer le rang de A. En déduire la dimension du noyau de φ.
   (c) Exprimer $\varphi(X^3)$ en fonction de $\varphi(X)$.
   En déduire une base de $\operatorname{Ker} \varphi$.