Examen module AT54
Année universitaire 2016-2017
Durée 2h

Le modèle d'état d'une machine à courant continu <u>série</u> est donné par le système d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \frac{1}{L}\left(-Ri - KL_f iw + v\right) \\ \frac{dw}{dt} = \frac{1}{J}\left(KL_f i^2 - fw - C_r\right) \end{cases} \quad \text{(equa. 1)}$$

où i est le courant d'induit (et d'inducteur), w la vitesse de rotation de la machine, v la tension d'induit, Cr le couple de charge, R, L et L_f respectivement la résistance, l'inductance globale (induit + inducteur) et l'inductance de l'inducteur, J l'inertie, f le frottement visqueux et K la constante de couple.

Question 1 (1 pt):
D'un point de vue purement pragmatique (sans calcul), justifier que l'estimation de la vitesse est envisageable à partir d'une mesure du courant d'induit.

Question 2 (2 pts):
D'un point de vue purement pragmatique (sans calcul ou à l'aide d'un schéma bloc du système), donner les conditions d'observabilité de la vitesse à partir d'une mesure du courant d'induit uniquement.

Question 3 (3 pts):
A partir de la 1ère ligne de l'équation (1), établir le modèle à temps continu en vue de la construction d'un observateur sur la base d'un modèle d'état augmenté à la vitesse w, où l'on supposera la vitesse comme lentement variable.

On notera le vecteur d'état $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ w \end{bmatrix}$ et l'équation d'état sous la forme $\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$.

Définir l'unique mesure y sur la machine et déterminer la matrice de mesure C ou fonction h(x), c'est-à-dire une équation de la forme :

$$y = Cx = h(x)$$

Question 4 (2 pts):

Calculer la matrice Jacobienne $J_c = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial h(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix}$, puis le déterminant.

En déduire les conditions d'observabilité de la vitesse à partir d'une mesure du courant d'induit uniquement.

Question 5 (2 pts):
A partir de la question 3, établir le modèle d'état à temps discret de la 1ère ligne du modèle, c'est-à-dire une équation de la forme :

$$i[k] = A_d(w[k-1])i[k-1] + B_d u[k-1]$$

où l'on approximera le calcul de e^{ATe} par un développement limité à l'ordre 1, soit $I+AT_e$.

Question 6 (1 pt):
A partir du résultat de la question 5 et du modèle d'évolution de la vitesse proposé à la question 3, établir le modèle d'état complet non-linéaire à temps discret, c'est-à-dire une équation de la forme :

$$i[k] = g_1(i[k-1], w[k-1], u[k-1]) = A_d(w[k-1])i[k-1] + B_d u[k-1]$$
$$w[k] = g_2(w[k-1])$$

Question 7 (3 pts):

Etablir les équations de l'observateur sur la base d'un filtre de Kalman optimal (non-linéaire). Pour rappel, dans les équations du filtre de Kalman non-linéaire en page 15 du cours, la matrice F pour le calcul de la matrice de variance-covariance d'erreur de prédiction est

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Question 8 (2 pts):
Donner l'expression des matrices R, Q et P[0[0] du filtre.

Question 9 (2 pts):
Commenter l'influence du réglage du filtre (R et Q) sur le gain de Kalman.

Question 10 (2 pts):
On vous propose maintenant d'appliquer le changement de variable suivant la 1ère ligne de l'équation (1) :

$$\begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_2 = -\frac{KL_f}{L} x_1 x_2 \end{cases}$$

Etablir le modèle à temps continu en vue de la construction d'un observateur sur la base d'un modèle d'état augmenté à l'entrée inconnue z_2.
Définir le schéma de cet observateur et conclure sur l'intérêt d'une telle approche.