AT54 EXAMEN FINAL

RATTRAPAGE

29 janvier 2024 de 9h30 à 11h00 en salle B212 à Belfort

L'utilisation de notes de cours n'est pas autorisée.

QUESTION 1 (2 points)

Considérons le système de fonction de transfert suivant :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+6}$$

Obtenez la représentation de l'espace d'état de ce système sous

(a) forme diagonale **(1 point)**

(b) forme canonique observable. **(1 point)**

QUESTION 2 (2 points)

Trouvez $x_1(t), x_2(t)$ du système décrit par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

où les conditions initiales sont

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Et l'entrée et la fonction échelon unitaire $u(t) = 1(t)$

QUESTION 3 (3 points)

Considérez le système de la figure en-dessous :

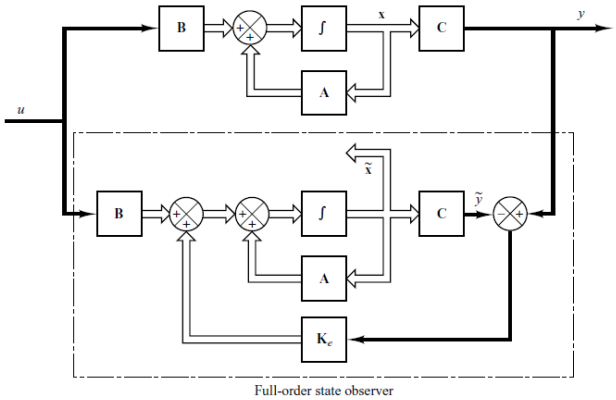
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u$$
$$y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$$

où

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Concevez un observateur de Luenberger d'état d'ordre complet, c'est-à-dire calculez $\boldsymbol{K}_e$ comme décrit dans la figure. Supposez que les valeurs propres souhaitées de la matrice de l'observateur sont

$$\mu_1 = -2,\ \mu_2 = -3$$



Vous devez calculer $\boldsymbol{K}_e$ en utilisant les trois méthodes développées dans le cours après avoir montré que cet observateur peut être développé. Chaque méthode utilisée vaut **1 point**.

QUESTION 4 (3 points)

Considérez le même système de l'exercice 3, c'est-à-dire :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u$$
$$y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$$

où

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

À l'aide du contrôle de rétroaction d'état $u = -\mathbf{Kx}$, Il est souhaitable de placer les pôles en boucle fermée à

$$\mu_1 = -2,\ \ \mu_2 = -3$$

Déterminer la matrice de gain de rétroaction d'état nécessaire $\boldsymbol{K}$, après avoir montré que ce placement de pôles peut être développé. Vous devez calculer $\boldsymbol{K}$ en utilisant toutes les trois méthodes développées dans le cours. Chaque méthode utilisée vaut **1 point.**

RAPPEL

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

Forme canonique contrôlable. La représentation suivante de l'espace d'état est appelée forme canonique contrôlable :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_n - a_n b_0 | b_{n-1} - a_{n-1} b_0 : \cdots | b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

Forme canonique observable. La représentation suivante de l'espace d'état est appelée forme canonique observable :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

Forme canonique diagonale

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} = b_0 + \frac{c_1}{s+p_1} + \frac{c_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & & & 0 \\ & -p_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & \\ \cdot & & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

Forme canonique de Jordan

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{(s+p_1)^3 (s+p_4)(s+p_5) \cdots (s+p_n)}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + \frac{c_1}{(s+p_1)^3} + \frac{c_2}{(s+p_1)^2} + \frac{c_3}{s+p_1} + \frac{c_4}{s+p_4} + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & -p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -p_4 & & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$