Final CP42

Aucun document autorisé

Partie I (13 points)

1 Reconnaissance Automatique de Features

1. En s’appuyant sur la géométrie et la topologie de la pièce, formuler une règle de production du premier ordre pour la reconnaissance automatique de feature ***« trou cylindrique débouchant »*** (figure 1).

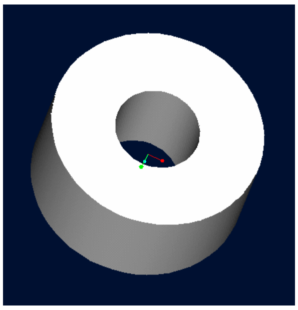


Figure 1

2 Modélisation et Arbre CSG

Soit le modèle générique (*pièce mère*) de CAO (figure 2.a), dont les trous sont débouchants. A partir de ce modèle générique, on génère deux modèles (*pièces enfants*) représentés dans la figure 2.b et la figure 2.c.
L’arbre CSG du **modèle générique** est le résultat d’une conjecture de **conception pour la configuration** (*familles de pièces*) et de l'application des règles formelles de la syntaxe, à savoir :

R1: *<arbre>:=<objet>*
R2: *<arbre>:=<arbre> <opération de Boole> <arbre>*
R3: *<arbre>:=<arbre> <opération de transformation > <arguments de transformation>*

1. Trouver les parties droite et gauche de chaque règle, en respectant la stratégie « **conception pour la configuration** » et les opérations suivantes:
   - *opération de Boole= « soustraction »,*
   - *opération de transformation=<symétrie>*
2. Représenter son arbre CSG.
3. Expliquer, comment à partir de cet arbre CSG du modèle générique, peut-on générer les deux « *pièces enfants* ».

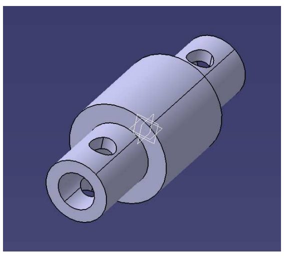
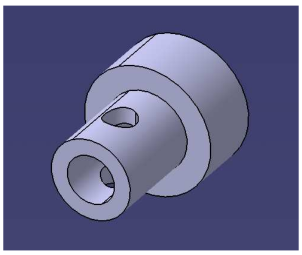
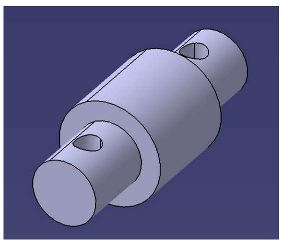
 a)	 b)	 c)

Figure 2

3 Famille de pièces

Soit donné l'ensemble des pièces {P1, P2, ….,P7} et l'ensemble de features de conception F={a,b,c,d,e,f,g}. Le tableau suivant montre l'appartenance des features aux modèles de CAO des pièces.

Pièce	Feature
P1	a, b, c
P2	e, f, g
P3	a, b, c, d
P4	e, f, g
P5	a, c, d
P6	f, g
P7	c, d

a. Construire la matrice Pièce-Feature.
b. Représenter les relations entre les Features par la matrice Feature-Feature et le graphe Feature-Feature.
c. Transformer la matrice Feature-Feature en matrice Floue Feature-Feature.
d. En utilisant une mesure de ressemblance supérieure à **1/7,** montrer que l'on peut trouver des pièces-mères minimales différentes.
e. Comparer le résultat avec le graphe Feature-Feature. Que peut-on conclure sur les sous-graphes correspondants aux pièces mères ?

4 Questions sur les concepts (réponses en une phrase) :

1. Montrer que le solide (figure 3) représente un solide non-manifold. Peut-on représenter ce solide par B.Rep ?

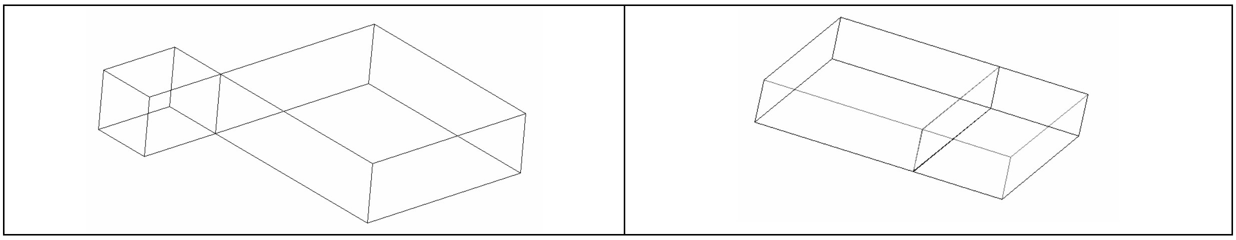


Figure 3

2. Soit donné la pièce {P1} (Figure 4c) et un ensemble de Features (Figure 4a et Figure 4b). La méthode de conception par Features est utilisée. Le modèle généré n'est pas valide pour l'utilisation en gamme automatique d'usinage. Pourquoi ?

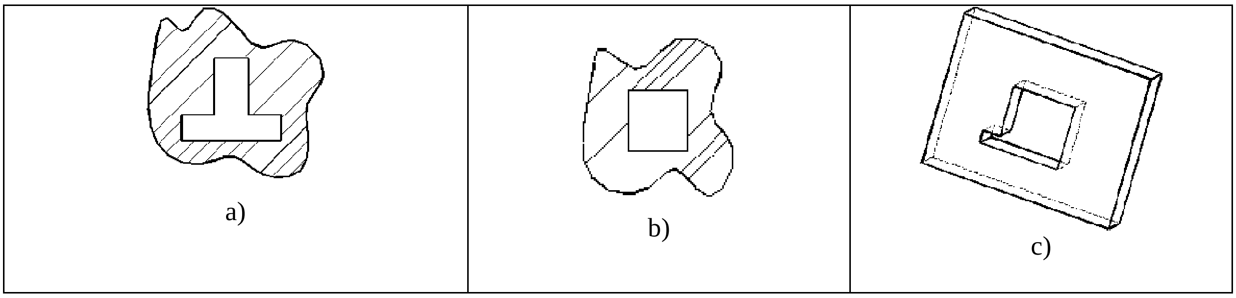
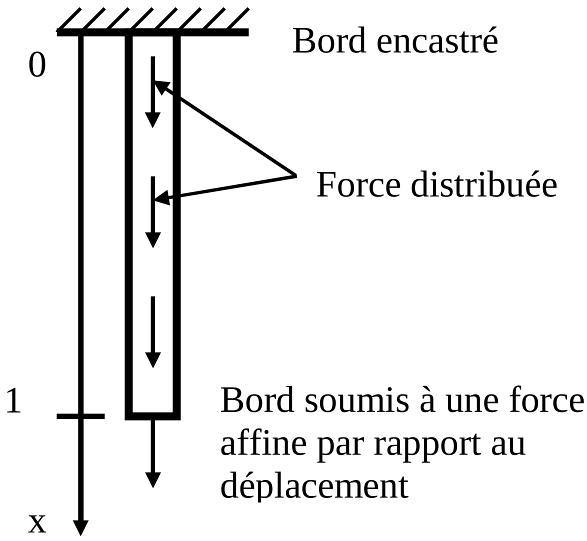


Figure 4

Partie II (7 points)



On considère le problème de la déformation d'un barreau élastique non homogène, encastré à une extrémité, soumis à l'effet d'une force concentrée à l'autre extrémité et soumis à l'effet de son propre poids que l'on traite comme une force distribuée.

Les variations du module d'Young E du barreau sont modélisées par une fonction croissante de la coordonnée x dans le barreau, $E(x) = E_0 + E_1 x$. Pour simplifier, on suppose que la longueur du barreau est de 1 mètre. On note $u(x)$ le champ de déplacement mécanique des points du barreau. Ce dernier est supposé à l'équilibre, si bien que u vérifie l'équation différentielle :

$$-(E(x)u'(x))' = f(x) \text{ pour } x \in]0,1[, \tag{1}$$

où f représente la force de gravité que l'on prendra égale à 1 dans les calculs numériques. La condition d'encastrement, c'est-à-dire de déplacement nul, s'écrit

$$u(0) = 0. \tag{2}$$

La force imposée à l'autre extrémité est affine par rapport au déplacement, c'est à dire qu'elle comprend deux contributions, la première g qui est constante et la seconde qui proportionnelle au déplacement $u(1)$ avec une constante de proportionnalité notée $-b$. Ainsi, la condition à la limite en $x = 1$ s'écrit

$$E(1)u'(1) = g - bu(1). \tag{3}$$

Dans les applications numériques, on choisira $b = g = 1$. Au total, les équations (1), (2) et (3) constituent le modèle qu'il faut résoudre pour déterminer le champs de déplacement. Il s'agit d'un problème aux limites constitué d'une équation differentielle et de deux conditions aux limites. On construit une approximation $u_h(x)$ du déplacement $u(x)$ à l'aide de la méthode des éléments finis.

On considère d'abord la situation où le matériau est homogène, c'est à dire où $E_1 = 0$ et donc $E = E_0$. Dans ce cas, l'équation (1) équivaut à l'équation habituelle

$$-Eu''(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in]0,1[. \tag{4}$$

1. On considère la situation particulière où $b = 0$ et donc l'équation (3) est remplacée par

$$E(1)u'(1) = g. \tag{5}$$

En choisissant l'espace des déplacements admissibles $\mathcal{V} = \{v(x) \in C^1(0,1) \mid v(0) = 0\}$, montrer que la solution $u(x)$ de (1), (2) et (4) est solution de la formulation variationnelle suivante :

$$u \in \mathcal{V}, \quad \int_0^1 Eu'v' \, dx = \int_0^1 fv \, dx + gv(1), \text{ pour tout } v \in \mathcal{V}.$$

Dans la suite, on considère le cas général où $b \neq 0$ et on admet que la formulation variationnelle associée est

$$u \in \mathcal{V}, \quad \int_0^1 Eu'v' \, dx + bu(1)v(1) = \int_0^1 fv \, dx + gv(1), \text{ pour tout } v \in \mathcal{V}.$$

2. A présent, on utilise un maillage à deux éléments et on discrétise le champ de déplacement par des fonctions P^1, c'est-à-dire affines par morceaux et globalement continues.

a. Décrire le maillage, c'est-à-dire les nœuds et les éléments.

b. Etablir le tableau des connectivités.

c. Indiquer le nombre de degrés de liberté locaux et le nombre de degrés de liberté globaux du champ de déplacement discrétisé.

3. On note ξ_1 et ξ_2 les deux nœuds d'un élément en notations locales. Vérifier à partir de la définition que les fonctions de forme d'un champ de déplacement sont $N_1(x) = 2(\xi_2 - x)$ et $N_2(x) = 2(x - \xi_1)$.

L'application de la méthode de Galerkin conduit à introduire l'ensemble des champs de déplacements admissibles $\mathcal{V}_h = \{v_h \in P^1 \mid v_h(0) = 0\}$, puis la formulation variationnelle approchée,

$$u_n \in \mathcal{V}_h, \quad \int_0^1 Eu_h'v_h' \, dx + bu_h(1)v_h(1) = \int_0^1 fv_h \, dx + gv_h(1) \text{ pour tout } v_h \in \mathcal{V}_h.$$

4.a. Décomposer la première intégrale sous forme de somme d'intégrales sur les éléments, puis montrer que cette somme s'écrit sous forme vectorielle,

$$\int_0^1 Eu_h'v_h' \, dx = (V^{e_1})^T A^{e_1} U^{e_1} + (V^{e_2})^T A^{e_2} U^{e_2}.$$

Expliciter ce que sont les vecteurs U^{e_i}, V^{e_i} pour $i = 1, 2$ et les matrices A^{e_1}, A^{e_2} (sans en calculer les valeurs numériques).

b. Expliquer, sans calcul, pourquoi les deux matrices A^{e_1} et A^{e_2} sont nécessairement différentes l'une de l'autre. Puis montrer que le premier coefficient $A^{e_1}(1,1) = 2.5$.

Tous calculs faits, on obtient $A^{e_1} = \begin{pmatrix} 2.5 & -2.5 \\ -2.5 & 2.5 \end{pmatrix}$ et $A^{e_2} = \begin{pmatrix} 3.5 & -3.5 \\ -3.5 & 3.5 \end{pmatrix}$. On admet également que le second terme du membre de gauche est

$$bu_h(1)v_h(1) = (V^{e_2})^T B^{e_2} U^{e_2} \text{ où } B^{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. On note U et V les vecteurs des degrés de liberté globaux de u_h et de v_h respectivement. Montrer que

$$\int_0^1 E u_h' v_h' \, dx + b u_h(1) v_h(1) = V^T A U + V^T B U = V^T C U$$

avec des matrices A et B qu'on explicitera, puis on vérifiera que

$$C = \begin{pmatrix} 2.5 & -2.5 & 0 \\ -2.5 & 6 & -2.5 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \end{pmatrix}.$$

En admettant que le second membre de la formulation variationnelle s'écrit,

$$\int_0^1 f v \, dx + g v(1) = V^T F + V^T G = V^T H,$$

avec $H = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 1.25 \end{pmatrix}$, on obtient le système linéaire satisfait par U,

$$V^T (CU - H) = 0, \tag{6}$$

pour tout V vecteur des degrés de liberté globaux associés à $v_h \in V$.

6. Montrer que les degrés globaux des champs u_h et v_h sont nécessairement de la forme $U = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, puis que le système (6) est équivalent au système 2×2,

$$\begin{pmatrix} 6 & -2.5 \\ -2.5 & 4.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.25 \end{pmatrix}.$$

7. On admet que la solution de ce système est $\begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2590 \\ 0.4217 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer la déformation u_h' dans chaque élément.

b. Calculer le déplacement approché u_h au milieu du premier élément.