CP46 – Automne 2005
Corrigé de l'Examen FINAL
18/01/2006

Toto et Momo au jardin public

3 exercices indépendants - Durée : 2 h - Documents autorisés

1 - Toto et Momo jouent au foot

Phase 1 : Toto fait une tête

Le ballon de Toto est considéré comme un point matériel de masse m.
Toto est debout sur le point O, origine d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, dans lequel un point possède les coordonnées x, y et z.
Nous sommes sur terre, dans un champ de pesanteur uniforme, dont l'accélération est $\vec{G} = -g\vec{k}$.
L'effet de l'air sur le ballon est considéré comme négligeable.
A l'instant $t = 0$, Toto propulse son ballon depuis le point (y_0, z_0) avec une vitesse initiale $\vec{V_0}$, de module V_0, incluse dans le plan $(\vec{j}, \vec{k})$ et faisant un angle $\alpha = (\vec{j}, \vec{V_0})$ positif avec le vecteur $\vec{j}$.
L'altitude de référence où l'énergie potentielle de pesanteur est nulle est le niveau du sol $(z = 0)$.
Au moment où le ballon quitte la tête de Toto, quelles sont ses énergies cinétique et potentielle de pesanteur ?
Au cours des instants suivants, l'énergie potentielle du ballon augmente, puis diminue.
Quel est le maximum d'énergie potentielle atteint ?
En déduire l'altitude maximale atteinte par le ballon.
Quand le ballon retombe sur le sol (z=0), quelle est son énergie cinétique, et quelle est sa vitesse (module et orientation) ?

Phase 2 : Momo rattrape le ballon et le renvoie en le faisant rouler sur le sol
Il réussit à le renvoyer de façon à ce qu'il possède une énergie identique à celle qu'il avait en tombant sur le sol.

Le ballon est maintenant considéré comme une sphère creuse dont la paroi a une épaisseur très faible par rapport à son rayon R (toute la masse est concentrée à la distance R du centre).
Calculer le moment d'inertie de cette sphère creuse par rapport à un axe passant par son centre.
Sachant que le ballon roule sans glisser, exprimer sa vitesse de rotation Ω en fonction de sa vitesse de translation V.
En déduire l'expression de son énergie cinétique totale (translation + rotation) en fonction de sa vitesse de translation.

Son énergie totale ayant été conservée depuis la tête de Toto, quelle est cette vitesse de translation du ballon roulant sur le sol ?

Tous les résultats seront exprimés littéralement, puis calculés pour les valeurs numériques suivantes :

- $g = 9{,}81\,m/s^2$
- $y_0 = 0$
- $z_0 = 1{,}50\,m$
- $V_0 = 6\,m/s$
- $\alpha = \frac{\pi}{3}$
- $m = 400\,g$
- $R = 12\,cm$

1 - Corrigé

Phase 1

Le ballon quitte la tête de Toto.
Energie cinétique :

$$\boxed{E_{c0} = \frac{1}{2} m\,V_0^2}$$

Energie potentielle de pesanteur :

$$\boxed{E_{p0} = m\,g\,z_0}$$

Energie totale :

$$E_t = E_{c0} + E_{p0}$$

La composante verticale de la vitesse du ballon diminue à cause de son poids, alors que sa composante horizontale est constante et vaut $V_0 \cos\alpha$.

L'énergie totale se conservant, l'énergie potentielle de pesanteur est maximale quand la composante verticale de la vitesse est nulle.

$$E_{p\,max} = E_t - E_{c\,min}$$

$$E_{P\,max} = \frac{1}{2} m\,V_0^2 + m\,g\,z_0 - \frac{1}{2} m\,V_0^2 \cos^2\alpha$$

$$\boxed{E_{p\,max} = m\,g\,z_0 + \frac{1}{2} m\,V_0^2 \sin^2\alpha}$$

Or $E_{p\,max} = m\,g\,z_{max}$

$$\boxed{z_{max} = z_0 + \frac{V_0^2}{2\,g} \sin^2\alpha}$$

Quand le ballon retombe sur le sol, toute son énergie initiale est devenue de l'énergie cinétique.

$$E_t = \frac{1}{2} m\,V_1^2$$

$$\boxed{V_1 = \sqrt{V_0^2 + 2\,g\,z_0}}$$

L'angle α_1 que fait alors la vitesse $\overrightarrow{V_1}$ avec le vecteur horizontal $\vec{j}$ est négatif, car la composante verticale de la vitesse est dirigée vers le bas, sa valeur est donnée par :

$$\cos\alpha_1 = \frac{V_0 \cos\alpha}{V_1}$$

$$\boxed{\alpha_1 = \mathrm{Arc}\cos\frac{V_0 \cos\alpha}{\sqrt{V_0^2 + 2\,g\,z_0}}}$$

<u>Phase 2</u>

Moment d'inertie I_C d'une sphère de rayon R, dont toute la masse m est concentrée à la distance R du centre C, par rapport à ce centre :

$$I_C = m\,R^2$$

Compte tenu des symétries, moment d'inertie I_P par rapport à un plan contenant le centre :

$$I_P = \frac{1}{3} I_C$$

Moment d'inertie I par rapport à un axe passant par le centre :

$$I = 2\,I_P$$

$$\boxed{I = \frac{2}{3} m\,R^2}$$

Le ballon roule sans glisser, donc :

$$\boxed{\Omega = \frac{V}{R}}$$

L'énergie cinétique totale (translation + rotation), dont la valeur est la même qu'initialement, vaut aussi, dans ce mouvement de roulement :

$$E_t = \frac{1}{2} m\,V^2 + \frac{1}{2} I\,\Omega^2$$

En remplaçant I et Ω par leurs valeurs en fonction de m et R :

$$\boxed{E_t = \frac{5}{6} m\,V^2}$$

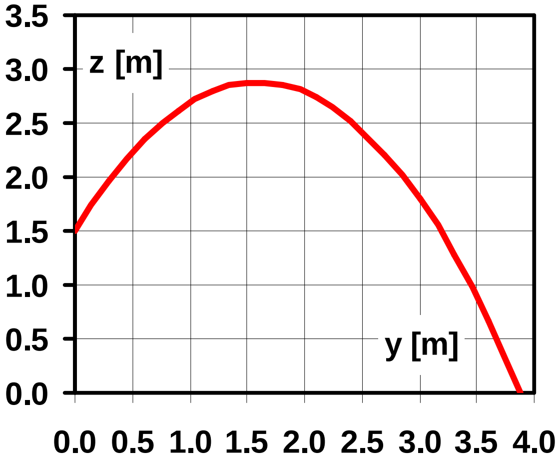
D'où on déduit la vitesse de translation V du ballon roulant sur le sol.

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{6\,E_t}{5\,m}}}$$

Application numérique :

Phase 1 :

E_{c0} = 7.20 J	**E_{pmax} = 11.29 J**	**E_{c1} = 13.09 J**
E_{p0} = 5.89 J	**z_{max} = 2.88 m**	**V_1 = 8.09 m/s**
E_t = 13.09 J		**α_1 = -68.2°**



Trajectoire du ballon.

Phase 2 :

I = 3.84E-03 kg.m²
V = 6.27 m/s

2 - Toto sur la balançoire

Toto est assis sur une balançoire constituée d'une planchette suspendue à un point fixe par 2 cordes inextensibles de longueur L.
Les masses de la planchette et des cordes sont négligeables par rapport à la masse de Toto.
Sa maman le pousse pour qu'il se balance avec une amplitude faible et se demande quelle sera la période de ses oscillations libres.

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, dans lequel un point possède les coordonnées x, y et z.
Nous sommes sur terre, dans un champ de pesanteur uniforme, dont l'accélération est $\vec{G} = -g\,\vec{k}$.
Il n'y a aucun frottement significatif.

<u>1ère approche</u>
Toto est considéré comme un point pesant situé en son centre de gravité, à une hauteur h au-dessus de la planchette.
Ce point, la planchette et les cordes sont parfaitement solidaires et fixes les uns par rapport aux autres.
A un instant donné, les cordes font un angle α avec la direction verticale.
Quels sont les efforts qui s'exercent sur le point pesant et quelle est leur résultante ?
Appliquer la propriété fondamentale de la dynamique à Toto (point), qui sera accéléré par cet effort résultant.
En déduire la variation de l'angle α (rappel : il est petit) en fonction du temps.
Constater qu'il s'agit d'un mouvement périodique.
Quelle en est la période ?

2ème approche

Toto est considéré comme un parallélépipède rectangle homogène posé sur la planchette, de masse m_T de hauteur 2h, de largeur 2b (direction droite-gauche de Toto) et d'épaisseur 2a (direction avant-arrière de Toto).

Ce parallélépipède rectangle, la planchette et les cordes, parfaitement solidaires et fixes les uns par rapport aux autres, se comportent comme un solide unique, pour ce mouvement.

Quel est le moment d'inertie de Toto (parallélépipède rectangle) par rapport à celui de ses axes de symétrie qui va de sa gauche à sa droite ?

Quel est son moment d'inertie par rapport à l'axe passant par les points d'accrochage des 2 cordes ?

A un instant donné, les cordes font un angle α avec la direction verticale.

Quels sont les efforts qui s'exercent au centre de gravité de Toto et quel est leur moment résultant par rapport à l'axe passant par les points d'accrochage des 2 cordes ?

Appliquer la propriété fondamentale de la dynamique au parallélépipède rectangle, qui est un solide en rotation autour de cet axe.

En déduire la variation de l'angle α (rappel : il est petit) en fonction du temps.

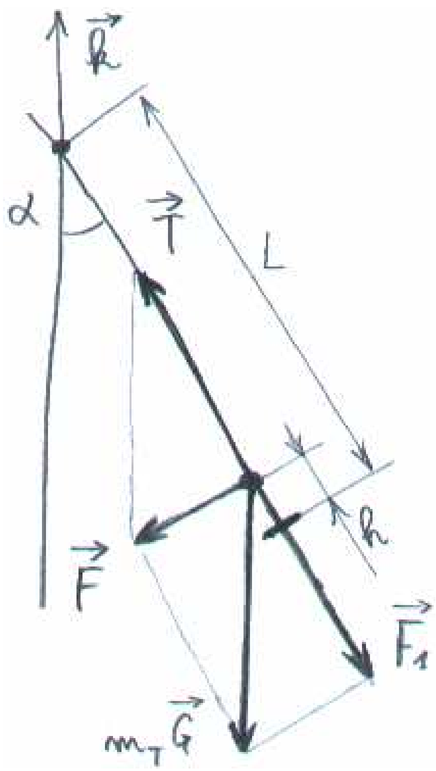
Constater qu'il s'agit d'un mouvement périodique.

Quelle en est la période ?

Tous les résultats seront exprimés littéralement, puis calculés pour les valeurs numériques suivantes :

- $g = 9{,}81\,m/s^2$
- $L = 3\,m$
- $h = 40\,cm$
- $b = 20\,cm$
- $a = 10\,cm$
- $m_T = 40\,kg$

2 - Corrigé



1ère approche

Les efforts qui s'exercent sur le point sont son poids $m_T\vec{G}$ et la tension $\vec{T}$ des cordes.

Le poids se décompose en 2 forces : $\vec{F_1}$ dans la direction des cordes et $\vec{F}$ perpendiculairement.

$m_T\vec{G} = \vec{F_1} + \vec{F}$

Comme les cordes ont une longueur fixe, le point ne bouge pas suivant leur direction, ce qui implique :

$\vec{F_1} + \vec{T} = \vec{0}$

La résultante des efforts qui s'exercent sur le point est donc :

$m_T\vec{G} + \vec{T} = \vec{F}$

Cette force $\vec{F}$ est perpendiculaire à la corde, orientée vers la verticale du point d'accrochage, donc de signe opposé à α ; sa valeur algébrique est :

$\boxed{F = -m_T\, g \sin\alpha}$

Propriété fondamentale de la dynamique appliquée au point pesant : il sera accéléré dans la direction de $\vec{F}$, avec une accélération Γ.

$F = m_T \, \Gamma$

Or, Γ est directement liée à la dérivée seconde de l'angle α.

$$\Gamma = (L-h)\frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

D'où l'équation différentielle :

$$-m_T \; g \sin\alpha = m_T \; (L-h)\frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

Cette équation différentielle se simplifie dans le cas des petites oscillations, où sinα peut être assimilé à α.

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{L-h}\alpha$$

La solution générale d'une équation de ce type est :

$$\boxed{\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_P t + \varphi) \quad \text{avec } \omega_P = \sqrt{\frac{g}{L-h}}}$$

Les constantes d'intégration α_0 et φ dépendent des conditions initiales.

La période T_P est liée à la pulsation ω_P par :

$$T_P = \frac{2\pi}{\omega_P}$$

$$\boxed{T_P = 2\pi\sqrt{\frac{L-h}{g}}}$$

Application numérique :

T_p = 3.23 s

<u>2ème approche</u>

Moment d'inertie du parallélépipède rectangle par rapport à son axe de symétrie Oy.

$$I_0 = \rho\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-h}^{h}(x^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

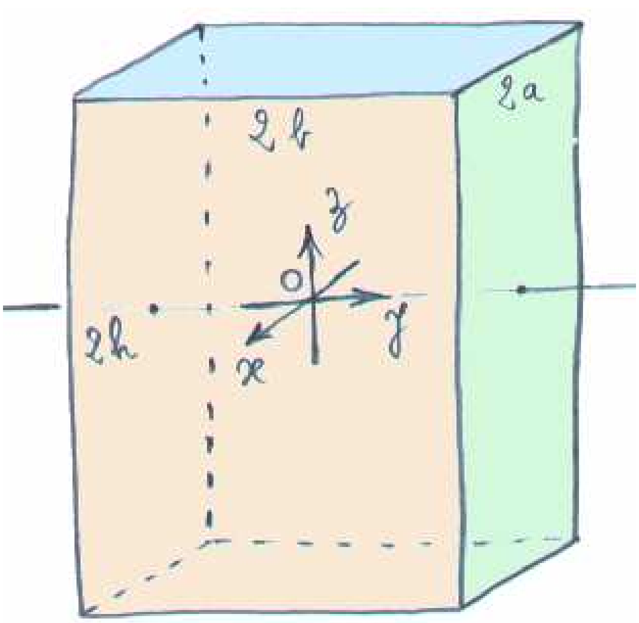
$$I_0 = \rho\,(\frac{8}{3}a^3bh + \frac{8}{3}abh^3)$$

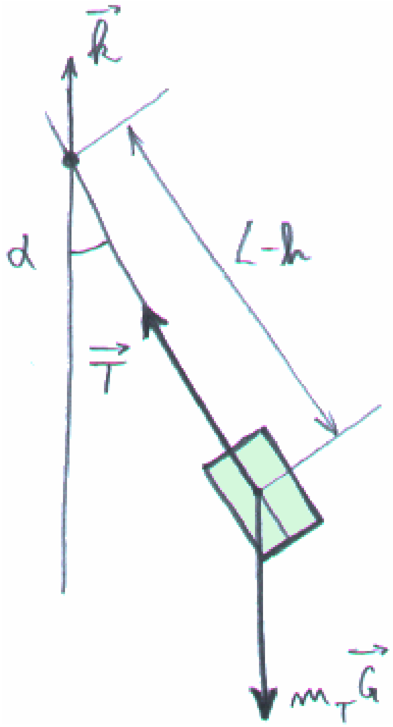
$$\boxed{I_0 = \frac{m_T}{3}(a^2+h^2)}$$

Le théorème de Huyghens permet de calculer le moment d'inertie du parallélépipède rectangle par rapport à l'axe de rotation (accrochage des cordes).

$$I_1 = I_0 + m_T(L-h)^2$$

$$\boxed{I_1 = \frac{m_T}{3}\left[a^2+h^2+3\,(L-h)^2\right]}$$

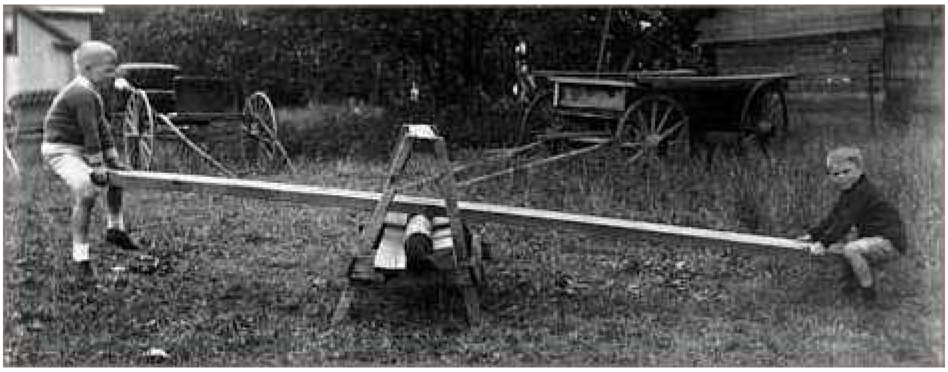




Les efforts qui s'exercent sur le parallélépipède rectangle sont son poids $m_T\vec{G}$ et la tension $\vec{T}$ des cordes.
Le moment de la tension des cordes par rapport à leur point d'accrochage est nul.
Le moment du poids, qui est donc le moment résultant qui d'exerce sur le parallélépipède rectangle, vaut :
$$M = -m_T g(L-h)\sin\alpha$$
Propriété fondamentale de la dynamique appliquée à un solide en rotation autour d'un point.
$$M = I_1 \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$
D'où l'équation différentielle :
$$-m_T\ g(L-h)\sin\alpha = I_1 \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$
Cette équation différentielle se simplifie dans le cas des petites oscillations, où $\sin\alpha$ peut être assimilé à α.
$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{m_T\ g(L-h)}{I_1}\alpha$$
La solution générale d'une équation de ce type est :
$$\boxed{\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_S t + \varphi) \quad \text{avec } \omega_S = \sqrt{\frac{m_T\ g(L-h)}{I_1}}}$$
Les constantes d'intégration α_0 et φ dépendent des conditions initiales.
La période T_S est liée à la pulsation ω_S par :
$$T_S = \frac{2\pi}{\omega_S}$$
$$\boxed{T_S = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{m_T\ g(L-h)}}}$$

Application numérique : **$I_0 = 2.27$ kg.m²** **$T_s = 3.25$ s**
$I_1 = 273$ kg.m²

3 - Toto et Momo en équilibre sur le tape-cul



Toto (à gauche) et Momo (à droite) ont des masses différentes m_T et m_M.
Ils sont assis sur une planche, de part et d'autre d'un appui, et cherchent une position d'équilibre, où leurs pieds ne toucheront plus le sol et où ils pourront étudier les sollicitations de leur planche.

Nous sommes sur terre, dans un champ de pesanteur uniforme, dont l'accélération $\vec{G}$, d'intensité g, est orientée vers le bas.
Il n'y a aucun frottement significatif au niveau de l'appui, qui peut donc être considéré comme un appui simple, ou un pivot parfait.
La planche, considérée comme une poutre, est munie d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dont l'origine O est positionnée au niveau de l'appui et dans lequel un point possède les coordonnées x, y et z.
L'axe $(O, \vec{i})$ oriente la poutre de la gauche vers la droite et l'axe $(O, \vec{k})$ est dirigé vers le haut.
A l'extrémité gauche de la poutre, en $x = -L_T$, le poids de Toto est appliqué verticalement à la poutre.

Sur la photo, Momo applique d'abord son poids à l'extrémité droite, $x = L_M$.
Petit à petit, il avance jusqu'à ce que ses pieds décollent.

On suppose que la planche s'immobilise de façon à ce que la tangente à la déformée de son axe soit parfaitement horizontale en $x = 0$, ce qui implique que $\vec{G} = -g\,\vec{k}$.
Quelle est la nouvelle distance L'_M entre Momo et l'appui ?
En chaque section x de la planche, la Résistance des Matériaux considère le torseur des efforts exercés par l'aval sur l'amont.
Quelles sont les valeurs des composantes de ce torseur, en fonction de x.
Tracer sur un graphique l'allure de leurs évolutions.
En quel point le moment fléchissant $M_y(x)$ est-il maximum et quelle est la valeur M_{ymax} de ce maximum ?
La section de la planche est rectangulaire, de largeur b (dans la direction $(O, \vec{j})$) et d'épaisseur e (dans la direction $(O, \vec{k})$).
Dans la section où le moment fléchissant est maximum, quel type de contrainte génère-t-il et comment cette contrainte varie-t-elle en fonction de y et z ?

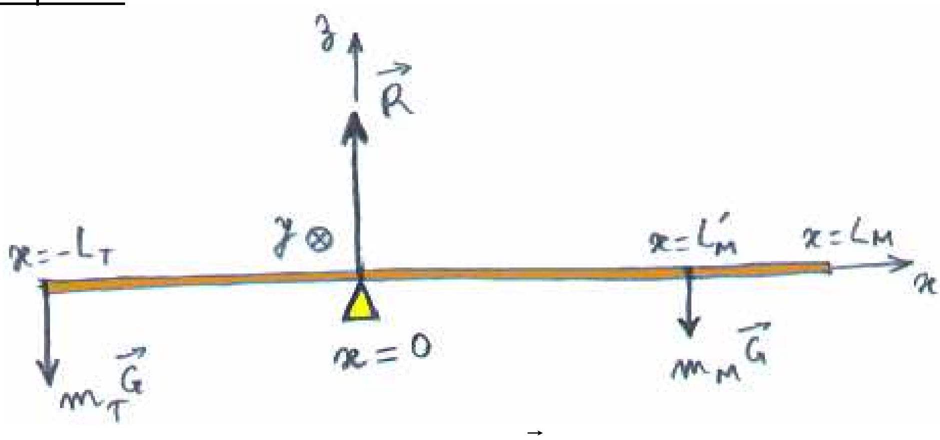
Quelle est la valeur maximale de cette contrainte et en quel(s) point(s) de la section est-elle atteinte ?
Le moment fléchissant existant le long de la poutre la déforme : chacun de ses points se déplace un peu vers le bas, sauf bien sûr au niveau du point d'appui, en $x = 0$.
Soit V(x) ce déplacement.
Déterminer V(x) le long de la poutre, entre $x = -L_T$ et $x = L_M$, en ne tenant compte que de l'effet du moment fléchissant.
Bien que la planche soit en bois, on considère qu'elle est constituée d'un matériau homogène et isotrope, possédant un module d'Young E.
Quel est le déplacement vertical de la planche au niveau de Toto ($V(-L_T)$), au niveau de Momo ($V(L'_M)$) et à l'extrémité côté Momo ($V(L_M)$) ?
En quel point le déplacement vertical V(x) est-il maximum, en valeur absolue, et quelle est la valeur V_{max} de ce maximum ?
Quelle type de contrainte génère l'effort tranchant T_z, dans quelle zone cette contrainte est-elle maximale et quelle est la valeur de ce maximum ?

Tous les résultats seront exprimés littéralement, puis calculés pour les valeurs numériques suivantes :

- $m_T = 40\ kg$
- $m_M = 34\ kg$
- $g = 9{,}81\ m/s^2$
- $L_T = 1{,}5\ m$
- $L_M = 2\ m$
- $b = 20\ cm$
- $e = 4\ cm$
- $E = 15000\ N/mm^2$

3 - Corrigé

Equilibre de la poutre



Comme il n'y a aucune force dans la direction $(O, \vec{i})$ L'équilibre de la planche se traduit par les 2 équations suivantes :

$R = (m_T + m_M)\, g$ (équilibre des composantes verticales de efforts)

$m_T\, g\, L_T = m_M\, g\, L'_M$ (équilibre des moments par rapport au pivot)

D'où :

$$\boxed{L'_M = L_T \frac{m_T}{m_M}}$$

Evolution du torseur de la RDM le long de la poutre

Le torseur des efforts exercés par l'aval sur l'amont a des expressions différentes le long des 3 tronçons de poutre délimités par $-L_T, 0, L'_M$ et L_M.

$-L_T < x < 0$	$0 < x < L'_M$	$L'_M < x < L_M$
$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g\,m_T(L_T + x) \\ g\,m_T & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g\,m_M(L'_M - x) \\ -g\,m_M & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$

Les composantes non-nulles sont un effort tranchant T_z et un moment fléchissant M_y.

Les graphes de leurs évolutions en fonction de x ont été tracés avec les valeurs numériques (voir à la fin de ce corrigé).

Le moment fléchissant M_y est maximum au niveau de l'appui, où il vaut :

$$\boxed{M_{y\,max} = g\,m_T\,L_T \quad \text{ou} \quad M_{y\,max} = g\,m_M\,L'_M}$$

Contraintes dues au moment fléchissant

Le moment fléchissant $M_{y\,max}$ génère, dans la section $x = 0$, des contraintes normales qui ne dépendent pas de y et varient linéairement en fonction de z.

$$n_1(y,z) = \frac{M_{y\,max}}{I_y}\,z$$

I_y est le moment d'inertie, ou moment quadratique, de la section, par rapport à son axe de direction y.

Dans le cas d'une section rectangulaire de largeur b suivant y et d'épaisseur e suivant z, il vaut :

$$I_y = \frac{b\,e^3}{12}$$

$$\boxed{n_1(y,z) = \frac{12\,g\,m_T\,L_T}{b\,e^3}\,z}$$

Le maximum n_{1max} de cette contrainte est atteint pour $z = \frac{e}{2}$, c'est à dire sur une ligne transversale de la face supérieure de la planche, juste au-dessus de l'appui.

$$\boxed{n_{1max} = \frac{6\,g\,m_T\,L_T}{b\,e^2}}$$

Déplacements

Le déplacement vers le bas $V(x)$ de chaque point de la planche est déduit de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = -\frac{M_y(x)}{E\,I_y}$$

Déplacements - Intégration sur le premier tronçon $(-L_T < x < 0)$

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = -\frac{g\,m_T}{E\,I_y}(x + L_T)$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = -\frac{g\,m_T}{E\,I_y}\left(\frac{1}{2}x^2 + L_T x + A_1\right)$$

$$V(x) = -\frac{g\,m_T}{E\,I_y}\left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}L_T x^2 + A_1\,x + B_1\right)$$

Les constantes d'intégration A_1 et B_1 se déduisent du fait que $V(x)$ et $\frac{dV(x)}{dx}$ sont nuls en $x = 0$.

$$\boxed{V(x) = -\frac{g\,m_T\,x^2}{2\,E\,I_y}\left(\frac{1}{3}x + L_T\right)}$$

En particulier :

$$\boxed{V(-L_T) = -\frac{g\,m_T\,L_T^3}{3\,E\,I_y}}$$

Déplacements - Intégration sur le deuxième tronçon $(0 < x < L'_M)$

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = -\frac{g\,m_M}{E\,I_y}(-x + L'_M)$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = -\frac{g\,m_M}{E\,I_y}\left(-\frac{1}{2}x^2 + L'_M\,x + A_2\right)$$

$$V(x) = -\frac{g\,m_M}{E\,I_y}\left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}L'_M\,x^2 + A_2\,x + B_2\right)$$

Les constantes d'intégration A_2 et B_2 se déduisent du fait que $V(x)$ et $\frac{dV(x)}{dx}$ sont nuls en $x = 0$.

$$\boxed{V(x) = -\frac{g\,m_M\,x^2}{2\,E\,I_y}\left(-\frac{1}{3}x + L'_M\right)}$$

En particulier :

$$\boxed{V(L'_M) = -\frac{g\,m_M\,L'^3_M}{3\,E\,I_y}}$$

Pour la suite, il est d'autre part utile de calculer $\frac{dV(x)}{dx}$ en $x = L'_M$.

$$\frac{dV(x)}{dx}(L'_M) = -\frac{g\,m_M\,L'^2_M}{2\,E\,I_y}$$

<u>Déplacements - Intégration sur le troisième tronçon</u> $(L'_M < x < L_M)$

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = 0$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = A_3$$

$$V(x) = A_3\, x + B_3$$

Les constantes d'intégration A_3 et B_3 se déduisent des valeurs de $V(x)$ et $\frac{dV(x)}{dx}$ calculées précédemment, pour le 2ème tronçon, en $x = L'_M$.

$$\boxed{V(x) = -\frac{g\, m_M\, L'^2_M}{2\, E\, I_y}\left(x - \frac{L'_M}{3}\right)}$$

En particulier :

$$\boxed{V(L_M) = -\frac{g\, m_M\, L'^2_M}{2\, E\, I_y}\left(L_M - \frac{L'_M}{3}\right)}$$

<u>Contraintes dues à l'effort tranchant</u>

L'effort tranchant M_z génère des contraintes de cisaillement qui ne dépendent pas de y et varient en fonction de z.

Dans le cas d'une section rectangulaire, la formule approchée des "Techniques de l'Ingénieur" est :

$$\boxed{t_2(y,z) = \frac{3\, T_z}{2\, b\, e}\left(1 - \frac{4z^2}{e^2}\right)}$$

Cette contrainte de cisaillement possède même signe que l'effort tranchant.

Elle est maximale dans le plan horizontal moyen de la planche, entre $x = -L_T$ et $x = 0$.

$$\boxed{t_{2max} = \frac{3\, g\, m_T}{2\, b\, e}}$$

CP46 – Automne 2005
Corrigé de l'Examen FINAL
18/01/2006

Application numérique :

L'_M = 1.76 m

M_{ymax} = 589 m.N

n_{1max} = 11.0 MPa

t_{2max} = 0.074 MPa

x =	x [m]	T_z [N] Effort tranchant	M_y [m.N] Moment fléchissant	V [mm] Dépla-cement
$-L_T$	-1.5	392	0	-27.6
	0	392	589	0
	0	-334	589	0
L'_M	1.76	-334	0	-38.2
L'_M	1.76	0	0	-38.2
L_M	2	0	0	-45.8