

Toto et Momo au jardin public

3 exercices indépendants - Durée : 2 h - Documents autorisés

1 - Toto et Momo jouent au foot



Phase 1 : Toto fait une tête.

Le ballon de Toto est considéré comme un point matériel de masse m .

Toto est debout sur le point O , origine d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, dans lequel un point possède les coordonnées x, y et z .

Nous sommes sur terre, dans un champ de pesanteur uniforme, dont l'accélération est $\vec{G} = -g\vec{k}$.

L'effet de l'air sur le ballon est considéré comme négligeable.

A l'instant $t = 0$, Toto propulse son ballon depuis le point (y_0, z_0) avec une vitesse initiale \vec{V}_0 , de module V_0 , incluse dans le plan (\vec{j}, \vec{k}) et faisant un angle $\alpha = (\vec{j}, \vec{V}_0)$ positif avec le vecteur \vec{j} .

L'altitude de référence où l'énergie potentielle de pesanteur est nulle est le niveau du sol ($z = 0$).

Au moment où le ballon quitte la tête de Toto, quelles sont ses énergies cinétique et potentielle de pesanteur ?

Au cours des instants suivants, l'énergie potentielle du ballon augmente, puis diminue.

Quel est le maximum d'énergie potentielle atteint ?

En déduire l'altitude maximale atteinte par le ballon.

Quand le ballon retombe sur le sol ($z=0$), quelle est son énergie cinétique, et quelle est sa vitesse (module et orientation) ?

Phase 2 : Momo rattrape le ballon et le renvoie en le faisant rouler sur le sol.

Il réussit à le renvoyer de façon à ce qu'il possède une énergie identique à celle qu'il avait en tombant sur le sol.

Le ballon est maintenant considéré comme une sphère creuse dont la paroi a une épaisseur très faible par rapport à son rayon R (toute la masse est concentrée à la distance R du centre).

Calculer le moment d'inertie de cette sphère creuse par rapport à un axe passant par son centre.

Sachant que le ballon roule sans glisser, exprimer sa vitesse de rotation Ω en fonction de sa vitesse de translation V .

En déduire l'expression de son énergie cinétique totale (translation + rotation) en fonction de sa vitesse de translation.

Son énergie totale ayant été conservée depuis la tête de Toto, quelle est cette vitesse de translation du ballon roulant sur le sol ?

Tous les résultats seront exprimés littéralement, puis calculés pour les valeurs numériques suivantes :

- $g = 9,81 \text{ m/s}^2$
- $V_0 = 6 \text{ m/s}$
- $m = 400 \text{ g}$
- $y_0 = 0$
- $\alpha = \frac{\pi}{3}$
- $R = 12 \text{ cm}$
- $z_0 = 1,50 \text{ m}$

2 - Toto sur la balançoire

Toto est assis sur une balançoire constituée d'une planchette suspendue à un point fixe par 2 cordes de longueur L .

Les masses de la planchette et des cordes sont négligeables par rapport à la masse de Toto.

Sa maman le pousse pour qu'il se balance avec une amplitude faible et se demande quelle sera la période de ses oscillations libres.

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, dans lequel un point possède les coordonnées x , y et z .

Nous sommes sur terre, dans un champ de pesanteur uniforme, dont l'accélération est $\vec{G} = -g \vec{k}$.

Il n'y a aucun frottement significatif.



1^{ère} approche :

Toto est considéré comme un point pesant situé en son centre de gravité, à une hauteur h au-dessus de la planchette.

Ce point, la planchette et les cordes sont parfaitement solidaires et fixes les uns par rapport aux autres.

A un instant donné, les cordes font un angle α avec la direction verticale.

Quels sont les efforts qui s'exercent sur le point pesant et quelle est leur résultante ?

Appliquer la propriété fondamentale de la dynamique à Toto (point), qui sera accéléré par cet effort résultant.

En déduire la variation de l'angle α (rappel : il est petit) en fonction du temps.

Constater qu'il s'agit d'un mouvement périodique.

Quelle en est la période ?

2^{ème} approche :

Toto est considéré comme un parallépipède rectangle homogène posé sur la planchette, de masse m_T de hauteur $2h$, de largeur $2b$ (direction droite-gauche de Toto) et d'épaisseur $2a$ (direction avant-arrière de Toto).

Ce parallépipède rectangle, la planchette et les cordes, parfaitement solidaires et fixes les uns par rapport aux autres, se comportent comme un solide unique, pour ce mouvement.

Quel est le moment d'inertie de Toto (parallélépipède rectangle) par rapport à celui de ses axes de symétrie qui va de sa gauche à sa droite ?

Quel est son moment d'inertie par rapport à l'axe passant par les points d'accrochage des 2 cordes ?

A un instant donné, les cordes font un angle α avec la direction verticale.

Quels sont les efforts qui s'exercent au centre de gravité de Toto et quel est leur moment résultant par rapport à l'axe passant par les points d'accrochage des 2 cordes ?

Appliquer la propriété fondamentale de la dynamique au parallélépipède rectangle, qui est un solide en rotation autour de cet axe.

En déduire la variation de l'angle α (rappel : il est petit) en fonction du temps.

Constater qu'il s'agit d'un mouvement périodique.

Quelle en est la période ?

Tous les résultats seront exprimés littéralement, puis calculés pour les valeurs numériques suivantes :

➤ $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

➤ $h = 40 \text{ cm}$

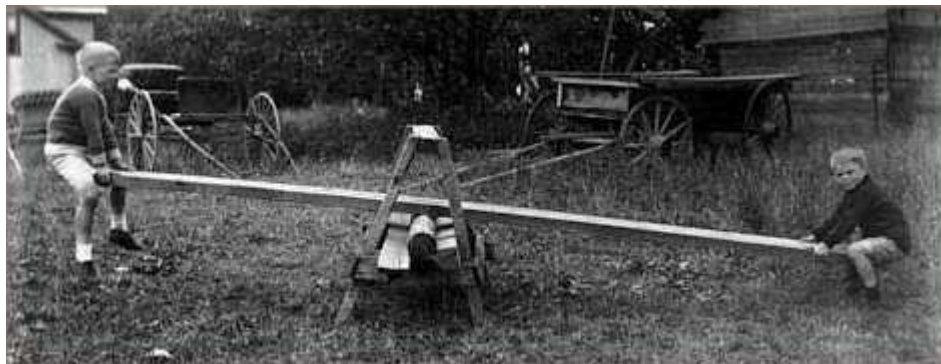
➤ $m_T = 40 \text{ kg}$

➤ $L = 3 \text{ m}$

➤ $b = 20 \text{ cm}$

➤ $a = 10 \text{ cm}$

3 - Toto et Momo en équilibre sur le tape-cul



Toto (à gauche) et Momo (à droite) ont des masses différentes m_T et m_M .

Ils sont assis sur une planche, de part et d'autre d'un appui, et cherchent une position d'équilibre, où leurs pieds ne toucheront plus le sol et où ils pourront étudier les sollicitations de leur planche.

Nous sommes sur terre, dans un champ de pesanteur uniforme, dont l'accélération \vec{G} , d'intensité g , est orientée vers le bas.

Il n'y a aucun frottement significatif au niveau de l'appui, qui peut donc être considéré comme un appui simple, ou un pivot parfait.

La planche, considérée comme une poutre, est munie d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dont l'origine O est positionnée au niveau de l'appui et dans lequel un point possède les coordonnées x , y et z .

L'axe (O, \vec{i}) oriente la poutre de la gauche vers la droite et l'axe (O, \vec{k}) est dirigé vers le haut.

A l'extrémité gauche de la poutre, en $x = -L_T$, le poids de Toto est appliqué verticalement à la poutre.

Sur la photo, Momo applique d'abord son poids à l'extrémité droite, $x = L_M$.
Petit à petit, il avance jusqu'à ce que ses pieds décollent.

On suppose que la planche s'immobilise de façon à ce que la tangente à la déformée de son axe soit parfaitement horizontale en $x = 0$, ce qui implique que $\vec{G} = -g \vec{k}$.

Quelle est la nouvelle distance L'_M entre Momo et l'appui ?

En chaque section x de la planche, la Résistance des Matériaux considère le torseur des efforts exercés par l'aval sur l'amont.

Quelles sont les valeurs des composantes de ce torseur, en fonction de x .

Tracer sur un graphique l'allure de leurs évolutions.

En quel point le moment fléchissant $M_y(x)$ est-il maximum et quelle est la valeur $M_{y_{\max}}$ de ce maximum ?

La section de la planche est rectangulaire, de largeur l (dans la direction (O, \vec{j})) et d'épaisseur e (dans la direction (O, \vec{k})).

Dans la section où le moment fléchissant est maximum, quel type de contrainte génère-t-il et comment cette contrainte varie-t-elle en fonction de y et z ?

Quelle est la valeur maximale de cette contrainte et en quel(s) point(s) de la section est-elle atteinte ?

Le moment fléchissant existant le long de la poutre la déforme : chacun de ses points se déplace un peu vers le bas, sauf bien sûr au niveau du point d'appui, en $x = 0$.

Soit $V(x)$ ce déplacement.

Déterminer $V(x)$ le long de la poutre, entre $x = -L_T$ et $x = L_M$, en ne tenant compte que de l'effet du moment fléchissant.

Bien que la planche soit en bois, on considère qu'elle est constituée d'un matériau homogène et isotrope, possédant un module d'Young E .

Quel est le déplacement vertical de la planche au niveau de Toto ($V(-L_T)$), au niveau de Momo ($V(L'_M)$) et à l'extrémité côté Momo ($V(L_M)$) ?

En quel point le déplacement vertical $V(x)$ est-il maximum, en valeur absolue, et quelle est la valeur V_{\max} de ce maximum ?

Quelle type de contrainte génère l'effort tranchant T_z , dans quelle zone cette contrainte est-elle maximale et quelle est la valeur de ce maximum ?

Tous les résultats seront exprimés littéralement, puis calculés pour les valeurs numériques suivantes :

- | | | |
|----------------------------|-------------------------|------------------------------|
| ➤ $m_T = 40 \text{ kg}$ | ➤ $L_T = 1,5 \text{ m}$ | ➤ $l = 20 \text{ cm}$ |
| ➤ $m_M = 34 \text{ kg}$ | ➤ $L_M = 2 \text{ m}$ | ➤ $e = 4 \text{ cm}$ |
| ➤ $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ | | ➤ $E = 15000 \text{ N/mm}^2$ |