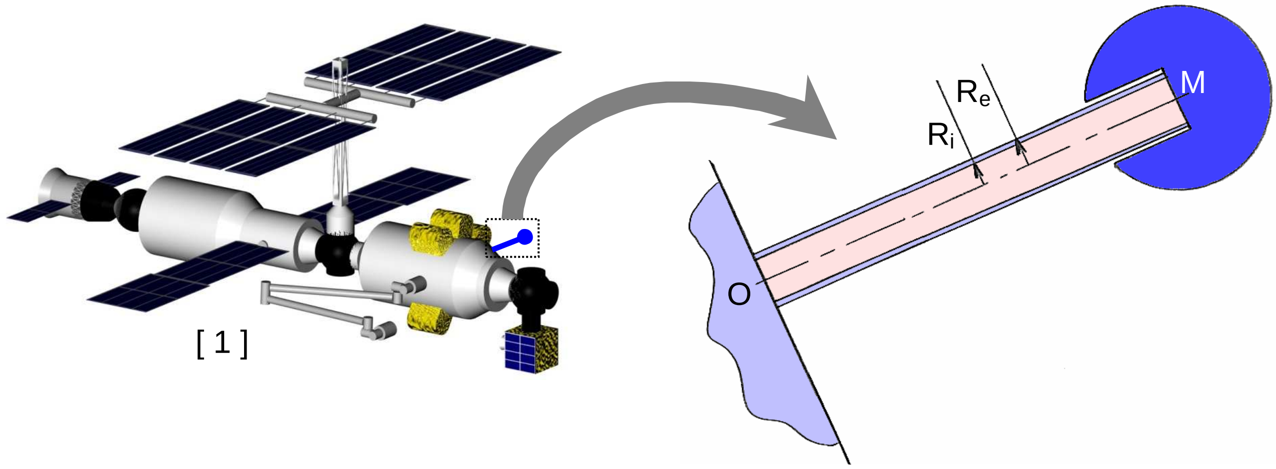
CP46 – Automne 2006
Corrigé de l'Examen FINAL
17/01/2007

2 exercices indépendants - Durée : 2 h - Documents autorisés

1. Vibration dans l'espace.

Un engin spatial est animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport aux axes de Copernic, très loin de toute masse de matière importante. Un appareil extérieur, de masse m, est fixé, en son centre de gravité M, à l'extrémité d'un support constitué d'un tube creux rectiligne (rayon extérieur R_e, rayon intérieur R_i, longueur L, croquis ci-dessous) dont l'autre extrémité O est encastrée dans la structure de l'engin, considérée comme fixe et indéformable.



1.1. Le support est considéré comme une poutre, au sens de la résistance des matériaux. G est le centre de gravité d'une section S. Définir un repère local et donner les noms de toutes les composantes possibles du torseur des efforts exercés par l'aval de cette section sur son amont.

1.2. Une force $\vec{F}$, de module F, est exercé par un cosmonaute sur le point M, dans une direction My perpendiculaire à l'axe du support. Déterminer, dans ce cas particulier, toutes les composantes du torseur des efforts exercés par l'aval d'une section du support sur son amont. Donner leurs expressions en fonction de F, L et x (distance entre le point O et le point G). Tracer les évolutions de ces grandeurs sur un graphique schématique en précisant les valeurs des extrema.

1.3. Calculer le moment d'inertie polaire I_G de la section du tube et en déduire simplement les moments quadratiques I_y et I_z.

1.4. L'une des composantes du torseur des efforts exercés par l'aval d'une section sur son amont génère des contraintes normales dans cette section ; laquelle ? Donner l'expression de cette contrainte normale en un point de la section. Quel est son maximum et où apparaît-il ?

1.5. Il est bien connu que les déplacements transversaux dus à l'une des composantes du torseur des efforts exercés par l'aval d'une section sur son amont sont généralement prépondérants. De quelle composante s'agit-il ? Calculer les déplacements $V_y(x)$ et rotations $\omega_z(x)$ des sections de la poutre dus à cette composante.

1.6. La rigidité K du support est définie comme le rapport de la force appliqué en son extrémité au déplacement induit de ce point : $K = \frac{F}{V_y(L)}$. Exprimer cette rigidité en fonction uniquement des dimensions du tube et du module d'Young du matériau qui le constitue.

1.7. Le support a été fléchi par la force $\vec{F}$ et le déplacement latéral du point M dans la direction y vaut V_0. Ce déplacement est suffisamment petit pour qu'on puisse considérer que le point M s'est déplacé sur une ligne droite. A l'instant $t = 0$, le cosmonaute lâche le point M sans lui imposer aucune vitesse, puis laisse le système évoluer librement. Quelle est la force $F_M(0)$ que le support exerce sur le point M juste après la disparition de la force exercée par le cosmonaute ? Quelle est la force $F_M(t)$ que le support exerce sur le point M à un instant t ultérieur, lorsque son déplacement dans la direction y prend une valeur V(t) ?

1.8. Comment s'énonce le principe fondamental de la dynamique appliqué à un point massif dans le repère de l'engin spatial ? Appliquer ce principe à l'objet de masse m considéré comme ponctuel et écrire l'équation différentielle qui régit son mouvement ultérieur.

1.9. Donner la solution de cette équation, constater qu'il s'agit d'un mouvement périodique et donner l'expression de sa fréquence.

1.10. Calculer numériquement la fréquence de ces oscillations libres avec les données suivantes.
Module d'Young de l'alliage TA6V à base de titane constituant le tube [2] :
$E = 105$ GPa

R_e = 30 mm	R_i = 28 mm
L = 1 m	m = 15 kg

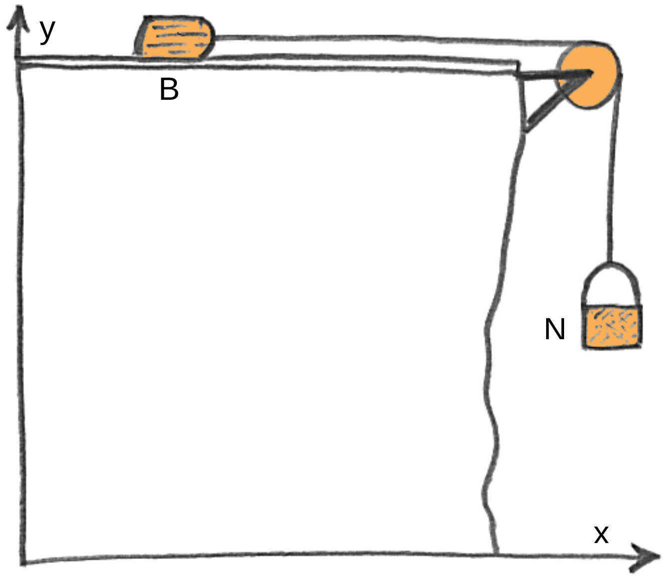
2. Le monte-charge des schtroumpfs.

Les schtroumpfs ont installé un monte-charge rudimentaire au bord de la falaise qui domine la plage (croquis page suivante). Ses constituants sont :

- Une nacelle N, de masse m_N à vide, dont le centre de gravité est le point G_N.
- Une poulie de rayon r, de masse m_P et de moment d'inertie I_P par rapport à son axe (qui passe par son centre de gravité G_P), fixée sur un support solidaire de la falaise, qui ne lui permet qu'une rotation autour de son axe et lui interdit tout autre mouvement.
- Un bloc de bois poli B, de masse m_B, libre de coulisser dans un guide rectiligne horizontal fixé rigidement au sol, qui lui interdit tout autre mouvement.
- Une corde inextensible, parfaitement flexible, de masse négligeable, passant sur la poulie qu'elle fait tourner sans glisser, dont une extrémité soulève la nacelle N et dont l'autre extrémité est accrochée au centre de gravité G_B du bloc B.

Pour monter les charges, les schtroumpfs attellent un robuste animal au bloc, qu'il tire dans son guide sans difficulté, jusqu'à amener la nacelle chargée à une hauteur H au-dessus de la plage. Une fois la nacelle vidée, à l'instant $t = 0$, l'animal est détaché, le bloc est libéré sans vitesse initiale et le système est abandonné à l'effet de la pesanteur (gravité g verticale orientée vers le bas). Le Grand Schtroumpf s'interroge alors sur le mouvement ultérieur de l'ensemble.

CP46 – Automne 2006
Corrigé de l'Examen FINAL
17/01/2007



[3]

2.1. Comment s'appellent les liaisons entre la poulie et son support et entre le bloc et son guide ?

2.2. Considérant que ces 2 liaisons sont parfaites, et qu'il n'y a aucun autre frottement (dû par exemple à l'air), faire le bilan des forces ou moments qui s'exercent sur la nacelle, le bloc et la poulie. Ecrire le torseur des efforts extérieurs agissant sur chacun de ces 3 solides (noter T_B et T_N les tensions inconnues de la corde côté bloc guidé et côté nacelle, exprimer les torseurs au centre de gravité des solides).

2.3. Que dit le théorème de la résultante dynamique et que permet-il d'écrire au sujet des accélérations Γ_N et Γ_B de la nacelle et du bloc ?

2.4. Que dit le théorème du moment dynamique et que permet-il d'écrire au sujet de l'accélération angulaire θ'' de la poulie ?

2.5. La corde rend les mouvements des 3 solides dépendants l'un de l'autre. Exprimer cette réalité par 2 équations supplémentaires liant Γ_N, Γ_B et θ'', résoudre le système d'équations ainsi obtenu et donner les expressions de Γ_N, Γ_B et θ''. Les mouvements des 3 solides sont-ils uniformes, uniformément accélérés, ou d'une autre nature ?

2.6. Quelle est l'énergie potentielle de pesanteur de la nacelle N à $t = 0$ et à un instant ultérieur quelconque où son altitude est y (la référence étant le niveau de la plage) ?

2.7. Quelle est l'énergie cinétique du système à un instant t positif quelconque, entre l'instant $t = 0$ et l'instant t_f où la nacelle prend contact avec la plage ?

2.8. En déduire la vitesse V_f de la nacelle au moment où elle arrive sur la plage, juste avant qu'elle ne soit arrêtée par le sable (altitude de son centre de gravité considérée alors comme nulle). Quelle aura été la durée t_f de la descente ?

2.9. Le Grand Schtroumpf invente un système de freinage du bloc qui limite automatiquement sa vitesse à une valeur choisie V_{max}, inférieure à V_f, à l'instant critique t_c où elle est atteinte. Quelle sera l'énergie dissipée dans ce frein au cours d'une descente de la nacelle ?

2.10. Quelle sera la nouvelle durée t'_f de la descente de la nacelle lorsque le frein limitera la vitesse à V_{max} ?

Références :

[1] - Space Station Design Workshop
Institute of Space Systems - Stuttgart University
http://www.irs.uni-stuttgart.de/SSDW/history/results2005.en.php

[2] - Les Techniques de l'Ingénieur - Coefficients d'élasticité
Bernard LE NEINDRE, Directeur de Recherche au Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS)
http://www.techniques-ingenieur.fr/affichage/DispIntro.asp?nGcmId=k486

[3] - Record schtroumpfé !
Blogobulles
http://blogobulles.blog.20minutes.fr/archive/2006/05/29/record-schtroumpfe.html

Eléments de réponses

Question 1.1

Les composantes possibles du torseur des efforts exercés par l'aval sur l'amont d'une section de poutre sont :

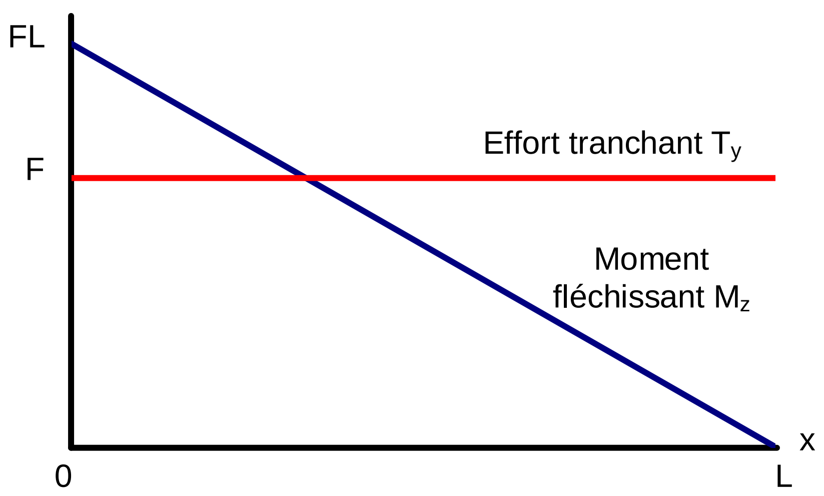
- Un effort normal, composante suivant la direction x de la résultante.
- Un effort tranchant, composante suivant la direction y ou z de la résultante.
- Un moment de torsion, composante suivant la direction x du moment.
- Un moment fléchissant, composante suivant la direction y ou z de du moment.

Question 1.2

L'axe Gy du repère local étant choisi parallèle à l'effort exercé et de même sens, la résultante et le moment résultant en G sont :

$$\boxed{\overrightarrow{R_G} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{M_G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F\,(L-x) \end{pmatrix}}$$



Question 1.3

Moment d'inertie polaire : $I_G = \iint_S r^2 \, dS$

Intégration en coordonnées polaires.

$$I_G = \int_0^{2\pi} \int_{Ri}^{Re} r^3 \, dr \, d\theta$$

$$\boxed{I_G = \frac{\pi}{2}\left(R_e^4 - R_i^4\right)}$$

Or $I_G = \iint_S (y^2 + z^2)\, dS$

Dans ce cas, l'équivalence des axes y et z implique $I_G = 2\, I_z$

$$\boxed{I_z = \frac{\pi}{4}\left(R_e^4 - R_i^4\right)}$$

<u>Question 1.4</u>

Le moment fléchissant génère dans la section des contraintes normales variant linéairement avec y.

$$n(x,y) = -\frac{M_z(x)}{I_z}\, y$$

$$\boxed{n(x,y) = -\frac{F(L-x)}{I_z}\, y}$$

Moment maximum dans la section $x = 0$

Dans cette section, contrainte maximale pour $y = -R_e$

$$\boxed{n_{max} = \frac{F\,L\,R_e}{I_z}}$$

<u>Question 1.5</u>

Il est bien connu que les déplacements transversaux dus au moment fléchissant sont généralement prépondérants par rapport à ceux qui sont dus à l'effort tranchant.

Le déplacement $V_y(x)$ de chaque section est déduit de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2V_y(x)}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{E\,I_z}$$

$$\frac{d^2V_y(x)}{dx^2} = \frac{F\,(\,L-x\,)}{E\,I_z}$$

1ère intégration : calcul de la rotation $\omega_z(x)$ des sections, sachant que $\omega_z(0) = 0$ (encastrement en O).

$$\boxed{\omega_z(x) = \frac{F\,L\,x}{E\,I_z}\left(1 - \frac{x}{2\,L}\right)}$$

2ème intégration : calcul du déplacement $V_y(x)$ des sections, sachant que $V_y(0) = 0$ (encastrement en O).

$$\boxed{V_y(x) = \frac{F\,L\,x^2}{2\,E\,I_z}\left(1 - \frac{x}{3\,L}\right)}$$

Question 1.6

Déplacement au point M : $V_y(L) = \dfrac{F L^3}{3 E I_z}$

D'où la rigidité : $K = \dfrac{3 E I_z}{L^3}$

$$\boxed{K = \frac{3 \pi E}{4 L^3}\left(R_e^4 - R_i^4\right)}$$

Question 1.7

Quand la force $\vec{F}$ fléchit le support et que le point M est déplacé de V_0, l'équilibre est maintenu par une réaction $-\vec{F}$ exercée par le support et dont la composante suivant l'axe My vaut $-KV_0$.

Juste après la disparition de la force $\vec{F}$, le support, qui n'a pas "eu le temps" de reprendre sa forme initiale exerce la même force sur le point (dite "force de rappel").

$$\boxed{F_M(0) = -KV_0}$$

Ultérieurement, lorsque le déplacement du point M prend une valeur V(t), le support exerce encore sur le point M la force :

$$\boxed{F_M(t) = -KV(t)}$$

Question 1.8

Principe fondamental de la dynamique appliqué à un point massif dans un repère galiléen :

$\vec{F} = m\vec{\Gamma}$

Dans le cas du point M de cet exercice, en projection sur l'axe My :

$$F_M(t) = m\frac{d^2V(t)}{dt^2}$$

D'où l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{d^2V(t)}{dt^2} + \frac{K}{m}V(t) = 0}$$

Question 1.9

Solution générale d'une équation différentielle de ce type :

$$V(t) = A\cos\left(\omega t + \varphi\right) \qquad \text{avec} \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

A et φ sont déterminés par les conditions initiales : $V(0) = V_0$ et $\dfrac{dV}{dt}(0) = 0$

$$\boxed{V(t) = V_0 \cos \omega t \qquad \text{avec} \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}}$$

Fréquence : $N = \dfrac{\omega}{2\pi}$

$$\boxed{N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}}$$

Question 1.10

$K = 48{,}3\ N/mm$

Attention : K doit être exprimé en N/m dans la formule qui donne N.

$\boxed{N = 9{,}03\ Hz}$

Question 2.1

La liaison entre la poulie et son support est un pivot.
La liaison entre le bloc et son guide est une glissière.

Question 2.2

Pour chacun des solides, on écrit la résultante des efforts $\vec{R}$ et le moment résultant $\overrightarrow{M_G}$ par rapport à son centre de gravité.
Les efforts agissant sur la nacelle sont la tension de la corde et le poids, qui sont colinéaires et verticaux.

$$\boxed{\overrightarrow{R_N} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_N\, g + T_N \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad \boxed{\overrightarrow{M_{GN}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Pour le bloc, la réaction verticale du sol équilibre le poids. Il n'est donc soumis qu'à la tension de la corde, qui ne crée aucun moment par rapport au centre de gravité, puisqu'il est dit que c'est le point où elle est attachée.

$$\boxed{\overrightarrow{R_B} = \begin{pmatrix} T_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad \boxed{\overrightarrow{M_{GB}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Pour la poulie, la réaction du support équilibre les tensions de la corde et le poids, puisque le pivot interdit tout mouvement de translation. Un moment est dû aux tensions des 2 brins de la corde.

$$\boxed{\overrightarrow{R_P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad \boxed{\overrightarrow{M_{GP}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r\, T_B - r\, T_N \end{pmatrix}}$$

Question 2.3

Théorème : La somme vectorielle des forces exercées sur un solide est égale au produit de la masse de ce solide par l'accélération de son centre d'inertie.
Comme la nacelle et le bloc n'ont qu'un mouvement de translation, leur accélération est la même en tout point, égale à celle de leur centre d'inertie.

$$\overrightarrow{R_N} = m_N\, \overrightarrow{\Gamma_N} \qquad \boxed{-m_N\, g + T_N = m_N\, \Gamma_N}$$

$$\overrightarrow{R_B} = m_B\, \overrightarrow{\Gamma_B} \qquad \boxed{T_B = m_B\, \Gamma_B}$$

Question 2.4

Théorème : Pour tout solide, le moment dynamique est égal au moment résultant du torseur des actions mécaniques extérieures.

$\overrightarrow{M_{GP}} = \overrightarrow{\delta_{GP}}$

Dans le cas d'un solide unique en rotation autour de l'un de ses axes principaux d'inertie, comme la poulie, le moment dynamique n'a qu'une composante selon cet axe.

$\delta_{GP} = I_P\ \theta''$

$$\boxed{r\ T_B - r\ T_N = I_P\ \theta''}$$

Question 2.5

Lorsque la nacelle descend, son altitude y diminue et la corde entraîne le bloc vers la droite, donc impose une augmentation de sa position x.

$$\boxed{\Gamma_B = -\Gamma_N}$$

La descente de la nacelle entraîne d'autre part une rotation de la poulie dans le sens négatif.

$$\boxed{\theta'' = \frac{\Gamma_N}{r}}$$

Les 2 équations de la question 2.3 permettent d'exprimer les tensions de la corde.

$T_N = m_N\ \Gamma_N + m_N\ g$

$T_B = m_B\ \Gamma_B$

Ces expressions sont reportées dans l'équation de la question 2.4, où toutes les accélérations sont remplacées par leur expression en fonction de Γ_N.

$$-r\ m_B\ \Gamma_N - r\ (m_N\ \Gamma_N + m_N\ g) = I_P\ \frac{\Gamma_N}{r}$$

D'où Γ_N et les 2 autres accélérations.

$$\boxed{\Gamma_N = \frac{-m_N\ g}{m_N + m_B + \frac{I_P}{r^2}}} \qquad \boxed{\Gamma_B = \frac{m_N\ g}{m_N + m_B + \frac{I_P}{r^2}}} \qquad \boxed{\theta'' = \frac{-m_N\ g}{r\ m_N + r\ m_B + \frac{I_P}{r}}}$$

Les mouvements des 3 solides sont uniformément accélérés.

Question 2.6

A $t = 0$: $\boxed{E_P = m_N\ g\ H}$

A un instant ultérieur t : $\boxed{E_P(t) = m_N\ g\ y(t)}$

Question 2.7

L'énergie cinétique du système est la somme des énergies cinétiques de ses 3 éléments massifs : $E_C(t) = \frac{1}{2} m_N V_N(t)^2 + \frac{1}{2} m_B V_B(t)^2 + \frac{1}{2} I_P \theta'(t)^2$

En valeur absolue, la nacelle et le bloc ont la même vitesse V(t) et la vitesse de rotation $\theta'(t)$ lui est liée par : $\theta'(t) = \frac{V(t)}{r}$.

$$\boxed{E_C(t) = \frac{V(t)^2}{2}\left(m_N + m_B + \frac{I_P}{r^2}\right)}$$

Question 2.8

A l'instant t_f, la nacelle est arrivée à l'altitude de référence, elle n'a donc plus d'énergie potentielle de pesanteur.

$E_P(t_f) = 0$

L'énergie potentielle de pesanteur des autres solides ne varie pas.

D'autre part l'énergie cinétique de l'ensemble vaut, au même instant :

$$E_C(t_f) = \frac{V_f^2}{2}\left(m_N + m_B + \frac{I_P}{r^2}\right)$$

Conservation de l'énergie mécanique totale (liaisons parfaites).

$E_P(0) = E_C(t_f)$

$$\boxed{V_f = \sqrt{\frac{2\,g\,H\,m_N}{m_N + m_B + \frac{I_P}{r^2}}}}$$

Remarque : Il s'agit du module de la vitesse, qui est négative pour la nacelle suivant y et positive suivant x pour le bloc guidé.

Le mouvement de la nacelle étant uniformément accéléré, la vitesse dépend linéairement du temps.

$V(t) = \Gamma_N\, t$

Donc : $t_f = \frac{-V_f}{\Gamma_N}$

$$\boxed{t_f = \sqrt{\frac{2\,H}{g\,m_N}\left(m_N + m_B + \frac{I_P}{r^2}\right)}}$$

Question 2.9

A $t = 0$, les vitesses sont nulles, l'énergie mécanique du système est égale à l'énergie potentielle de pesanteur de la nacelle : $E_M(0) = m_N\, g\, H$

A un instant critique t_c, les vitesses du bloc et de la nacelle atteignent V_{max}.

L'énergie mécanique du système est alors : $E_M(t_c) = E_P(t_c) + E_C(t_c)$

Avec $E_C(t_c) = \frac{V_{max}^2}{2}\left(m_N + m_B + \frac{I_P}{r^2}\right)$

A partir de là, le frein agit, la glissière n'est plus une liaison parfaite, l'énergie cinétique n'augmente plus, l'énergie mécanique n'est plus conservée.

A la fin de la descente : $E_M(t'_f) = 0 + E_C(t_c)$

D'où la perte d'énergie mécanique, qui correspond à l'énergie dissipée au niveau du frein.

$$\Delta E_M = E_M(0) - E_M(t'_f)$$

$$\boxed{\Delta E_M = m_N\, g\, H - \frac{V_{max}^2}{2}\left(m_N + m_B + \frac{I_P}{r^2}\right)}$$

Question 2.10

La descente de la nacelle se décompose maintenant en 2 phases :

- Un mouvement uniformément accéléré, où sa vitesse passe de 0 à V_{max}, en un temps t_c.
- Un mouvement uniforme, à la vitesse V_{max}, d'une durée de $t'_f - t_c$.

Pendant la phase uniformément accélérée, la vitesse dépend linéairement du temps.

$$V(t) = \Gamma_N\, t$$

Donc : $t_c = \dfrac{-V_{max}}{\Gamma_N}$

La conservation de l'énergie mécanique pendant cette phase donne accès à l'altitude y_c atteinte quand le frein entre en action.

$$E_P(0) = E_P(t_c) + E_C(t_c)$$

$$m_N\, g\, H = m_N\, g\, y_c + E_C(t_c)$$

$$y_c = H - \frac{E_C(t_c)}{m_N\, g}$$

La durée du mouvement uniforme peut alors être déduit de cette distance y_c qui reste à parcourir à la vitesse V_{max}.

$$t'_f - t_c = \frac{y_c}{V_{max}}$$

D'où t'_f, la durée totale de la descente dans les nouvelles conditions.

$$t'_f = t_c + \frac{y_c}{V_{max}}$$

$$t'_f = \frac{-V_{max}}{\Gamma_N} + \frac{1}{V_{max}}\left(H - \frac{E_C(t_c)}{m_N\, g}\right)$$

$$\boxed{t'_f = \frac{H}{V_{max}} + \frac{V_{max}}{2\, m_N\, g}\left(m_N + m_B + \frac{I_P}{r^2}\right)}$$

Remarques :

- Si V_{max} est très faible (freinage peu de temps après le début de la descente), la phase d'accélération est très courte et la durée t'_f s'approche de la valeur qu'elle aurait pour une descente complète à une vitesse V_{max} constante, soit $\dfrac{H}{V_{max}}$.
- Si V_{max} = Vf, on peut vérifier que $t'_f = t_f$ (freinage au dernier instant de la descente).