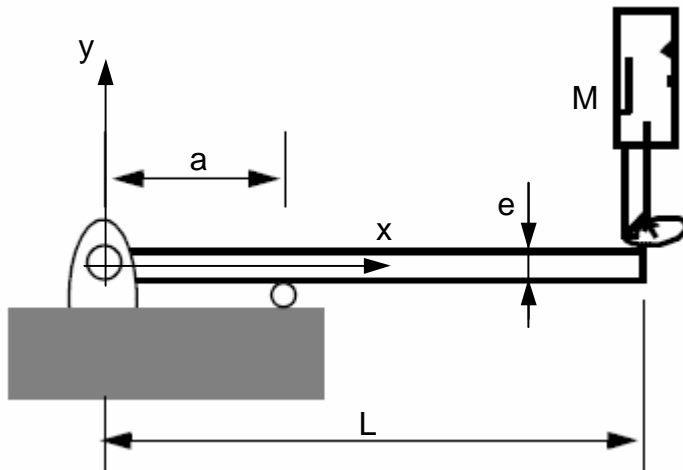


2 exercices indépendants - Durée : 2 h - Documents autorisés

### 1. Le plongeur personnalisé.



L'illustration ci-contre, extraite de [ 1 ], vous représente schématiquement sur votre plongeur personnel, que vous vous proposez de dimensionner.

La planche du plongeur est fixée au bord de la piscine, en son extrémité gauche, par l'intermédiaire d'une rotule et repose sur un appui simple situé à une distance  $a$  de cette extrémité.

Elle est considérée comme une poutre droite de longueur  $L$  et de section rectangulaire constante  $b \times e$ .

Vous admettez que vous pouvez être modélisé(e) par une masse ponctuelle

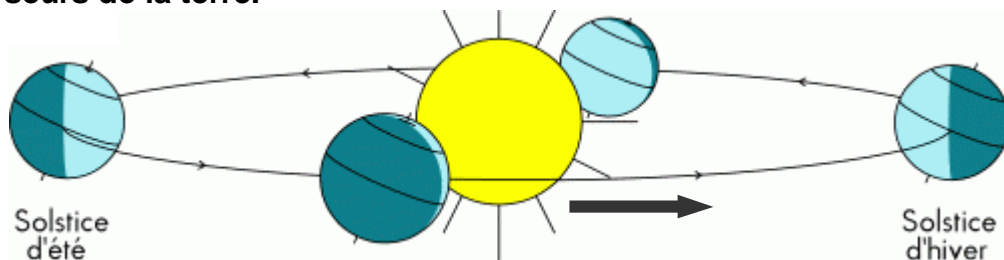
$M$  positionnée à l'extrémité libre de la planche (dont la masse propre peut être négligée).

Toutes les dimensions sont fixées, sauf l'épaisseur  $e$  de la planche, que vous souhaitez choisir de façon à ce que le système oscille avec une période  $T$  donnée.

- 1.1. Représenter schématiquement la poutre à étudier, repérée comme sur l'illustration, avec ses appuis et les efforts à prendre en compte.  
Compte tenu de l'accélération  $g$  de la pesanteur terrestre, votre poids agit dans la direction  $y$ , vers le bas, avec un module  $P_0 = Mg$ .  
Ecrire les équations traduisant l'équilibre de la poutre lorsque vous êtes immobile en son extrémité et en déduire la valeur de tous les efforts agissant alors sur la poutre.
- 1.2. La théorie des poutres définit plusieurs sortes d'efforts agissant dans une section ; dans ce cas particulier, comment s'appelle l'effort qui apparaît ?  
Donner son équation et représenter schématiquement ses évolutions en fonction de  $x$ .
- 1.3. La théorie des poutres définit plusieurs sortes de moments agissant dans une section ; dans ce cas particulier, comment s'appelle le moment  $M$  qui apparaît ?  
Donner son équation et représenter schématiquement ses évolutions en fonction de  $x$ .
- 1.4. La déformation de la poutre sous l'effet de ce moment dépend d'un moment quadratique, ou moment d'inertie,  $I$ , caractérisant la section.  
Démontrer la formule qui le donne en fonction des côtés  $e$  et  $b$  de la section.
- 1.5. Ecrire l'équation différentielle qui permet de déterminer le déplacement  $V(x)$  de la poutre en fonction du moment  $M(x)$ .
- 1.6. Quelles sont les conditions aux limites qui permettent de résoudre cette équation ?
- 1.7. Calculer le déplacement  $V(x)$  de chaque section de la poutre sous l'effet de votre poids  $P_0$ , en ne tenant compte que du moment déterminé ci-dessus.
- 1.8. Constater que le déplacement de l'extrémité  $V(L)$  est proportionnel à  $P_0$  et calculer la rigidité de la poutre  $K = \frac{-P_0}{V(L)}$  en fonction uniquement de ses dimensions  $L$ ,  $a$ ,  $e$  et  $b$ , ainsi que du module d'Young du matériau qui la constitue.

- 1.9. Le déplacement  $V(L)$  de l'extrémité de la poutre dû à votre seul poids  $P_0$  est maintenant appelé  $y_0$ .  
 Soit  $y_0 + y_1$  le déplacement de l'extrémité de la poutre lorsque vous vous y tenez, immobile, avec un bébé de poids  $P_1$  dans les bras.  
 Exprimer  $y_0$  et  $y_0 + y_1$  en fonction de  $K$ ,  $P_0$  et  $P_1$ .  
 Plus généralement, connaissant  $K$ , quel est le déplacement  $y$  de l'extrémité de la poutre lorsqu'un effort quelconque  $F$  lui est appliqué verticalement ?
- 1.10. A l'instant  $t = 0$ , le bébé saute à l'eau et le système masse + poutre se met en mouvement.  
 Quel est, à un instant ultérieur  $t$  quelconque, la résultante des efforts qui s'exercent sur la masse, qui est alors située en  $y$  ?
- 1.11. Quelle est l'équation différentielle qui régit alors le mouvement de la masse.
- 1.12. Résoudre cette équation et montrer que le mouvement est périodique.  
 Exprimer la période  $T$  en fonction de la masse  $M$  et de la rigidité  $K$  de la poutre.
- 1.13. Exprimer la période  $T$  en fonction des dimensions  $L$ ,  $a$ ,  $e$  et  $b$  de la poutre, de son module d'Young et de la masse  $M$ .  
 En déduire l'épaisseur  $e$  qui permet d'obtenir la valeur souhaitée de la période  $T$  du mouvement.
- 1.14. Application numérique.  
 $M =$  votre masse personnelle.  
 $L = 3$  m                       $a = 0,6$  m                       $b = 0,5$  m                       $E = 10$  GPa  
 Calculer l'épaisseur  $e$  qui est nécessaire pour que la période de vos oscillations soit  $T = 1$  s.

## 2. Les torseurs de la terre.



La figure ci-dessus, issue de [ 2 ], représente la terre en orbite autour du soleil.  
 Le but de l'exercice est d'appliquer certains résultats vus en mécanique du solide à la description du mouvement de la terre.  
 En première approximation, la terre est considérée comme un point  $T$  de masse  $M$ , décrivant un cercle de rayon  $R_S$  centré sur un point  $S$ , représentant le soleil et considéré comme immobile.

- 2.1. Représenter ce système simplifié, vu du dessus, par un croquis faisant apparaître un repère orthonormé direct  $(S, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , où le plan  $(S, \vec{i}, \vec{j})$  contient la trajectoire de la terre et dont l'axe  $(S, \vec{i})$  passe par la position de la terre au solstice d'hiver.  
 L'instant  $t = 0$  est le solstice d'hiver.  
 A un instant  $t$  ultérieur quelconque, la position de la terre est repérée, en coordonnées polaires, par les paramètres classiques  $r$  et  $\theta$ .

**CP46 – Automne 2007**  
**Corrigé de l'Examen FINAL**  
**23/01/2008**

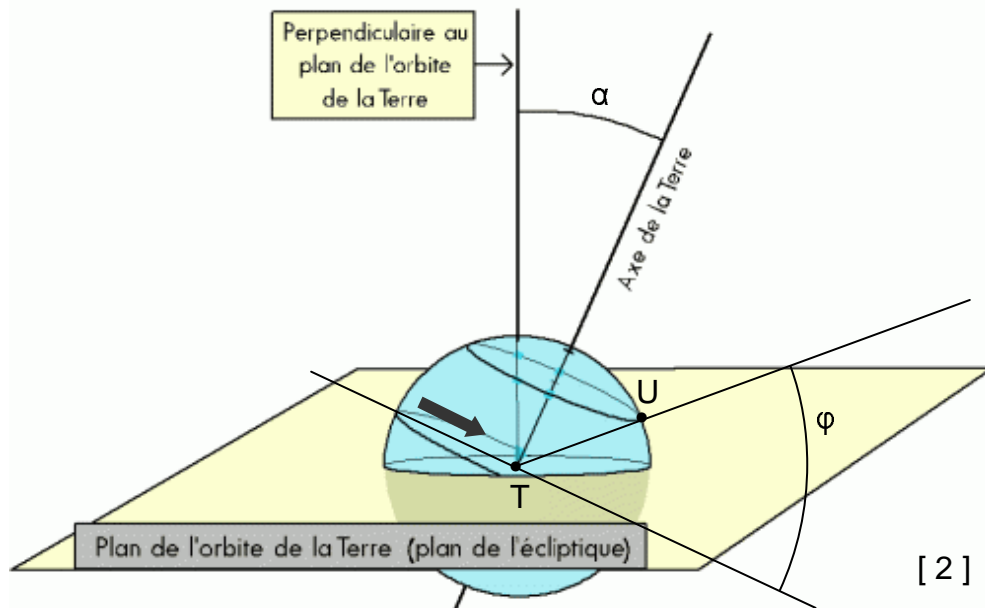
Sachant que la terre tourne autour du soleil avec une vitesse angulaire constante  $\Omega_S$ , écrire les équations de son mouvement en coordonnées polaires, puis en coordonnées cartésiennes.

- 2.2. Quelles sont, dans le repère  $(S, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , les composantes du vecteur  $\vec{V}_T$ , vitesse de la terre ? Quelle est son énergie cinétique  $E_{c1}$  ?
- 2.3. Quelles sont, dans le repère  $(S, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , les composantes du vecteur  $\vec{\Gamma}_T$ , accélération de la terre ?
- 2.4. Que dit le principe fondamental de la dynamique appliqué au point T et que peut-on en déduire concernant un éventuel effort exercé sur ce point ?

Pour une modélisation un peu plus complète, la terre est maintenant considérée comme une sphère homogène de masse M et de rayon  $R_T$ , centrée sur le point T.

Elle est animée du mouvement de rotation autour du soleil déjà étudié et d'un mouvement de rotation propre autour d'un axe contenu dans le plan  $(T, \vec{i}, \vec{k})$ , faisant un angle  $\alpha$  avec la direction  $(T, \vec{k})$  (figure ci-dessous).

Soient  $\vec{\Omega}_S$  et  $\vec{\Omega}_T$  les vecteurs rotations caractérisant respectivement ces 2 mouvements.



- 2.5. Exprimer le torseur cinématique de la terre en son centre de gravité T.
- 2.6. L'UTBM, à Sévenans, est située à la surface de la terre en un point U repéré, par rapport à l'équateur, par sa latitude  $\phi$ .  
Quel est le vecteur vitesse  $\vec{V}_U$  de l'UTBM au milieu de la nuit du solstice d'hiver ( $t = 0$ ), les points T et U étant alors dans le plan  $(S, \vec{i}, \vec{k})$  ?
- 2.7. Montrer que le moment d'inertie de la terre par rapport à son axe de rotation vaut  $I = \frac{2}{5} MR_T^2$ .
- 2.8. Exprimer le torseur cinétique de la terre en son centre de gravité T, à un instant t quelconque.

2.9. Que dit le deuxième théorème de Koenig ?

Utiliser ce résultat pour calculer l'énergie cinétique de la terre  $E_{C2}$ .

Donner son expression en fonction seulement de  $M$ ,  $R_S$ ,  $R_T$ ,  $\Omega_S$ , et  $\Omega_T$ .

2.10. Application numérique :

$R_S = 1,496 \cdot 10^{11}$  m     $\Omega_S = 1$  tour / 365,3 jours    [ 3 - "Unité astronomique"]

$R_T = 6,371 \cdot 10^6$  m    [ 3 - "Pesanteur"]

$M = 5,974 \cdot 10^{24}$  kg     $\alpha = 23,44^\circ$     [ 3 - "Terre"]

$\varphi = 47,59^\circ$     [ 4 ]

$\Omega_T = 1$  tour / jour

Calculer l'énergie cinétique  $E_{C1}$  de la terre considérée comme un point et l'énergie cinétique  $E_{C2}$  de la terre considérée comme une sphère.

Quel est l'écart relatif entre ces 2 résultats ?

Calculer la vitesse du centre de gravité de la terre (point T) et la vitesse de l'UTBM (point U) au milieu de la nuit du solstice d'hiver.

## Références

### [ 1 ] - MIT OpenCourseWare

Problem Set #9 - 1.050 Solid Mechanics - Fall 2002

[http://dspace.mit.edu/html/1721.1/36381/1-050Fall-2002/NR/rdonlyres/Civil-and-Environmental-Engineering/1-050Solid-MechanicsFall2002/54F98ABD-1F1F-44C5-8791-A67E558FEC35/0/pset02\\_9.pdf](http://dspace.mit.edu/html/1721.1/36381/1-050Fall-2002/NR/rdonlyres/Civil-and-Environmental-Engineering/1-050Solid-MechanicsFall2002/54F98ABD-1F1F-44C5-8791-A67E558FEC35/0/pset02_9.pdf)

### [ 2 ] - Comité de Liaison Enseignants et Astronomes

La révolution de la terre

<http://www.ac-nice.fr/clea/lunap/html/Revolution/RevolutionEnBref.html>

### [ 3 ] - Wikipédia

Bienvenue sur Wikipédia, l'encyclopédie libre et gratuite que chacun peut améliorer.

<http://fr.wikipedia.org/>

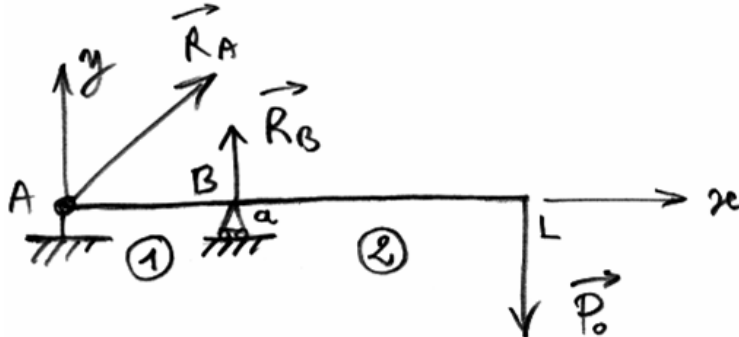
### [ 4 ] - Carte de France : la France vue du Ciel Wikipédia

Carte de France : la France vue du Ciel

<http://www.carte-france.info/>

## Éléments de réponses

### Question 1.1



Compte tenu de la nature des appuis, la réaction  $\vec{R}_A$  peut avoir 2 composantes  $R_{AX}$  et  $R_{AY}$ , alors que la réaction  $\vec{R}_B$  ne peut avoir qu'une composante  $R_{BY}$ .

Pour un problème plan tel que celui-ci, 3 équations traduisent l'équilibre des forces et des moments.

Les moments sont calculés par rapport au point A.

$$\begin{cases} R_{AX} = 0 \\ R_{AY} + R_{BY} - P_0 = 0 \\ aR_{BY} - LP_0 = 0 \end{cases}$$

D'où les valeurs des efforts exercés par les appuis.

Remarque :  $R_{AY} < 0$ , l'effort exercé par la rotule est dirigé vers le bas.

$$R_{AX} = 0$$

$$R_{AY} = P_0 \left( 1 - \frac{L}{a} \right)$$

$$R_{BY} = \frac{P_0 L}{a}$$

### Question 1.2

La résultante du torseur des efforts exercés en une section par l'aval sur l'amont ne possède ici qu'une composante suivant y, appelée "Effort tranchant".

Son évolution est décrite par 2 équations différentes le long des 2 tronçons de la poutre définis sur le croquis.

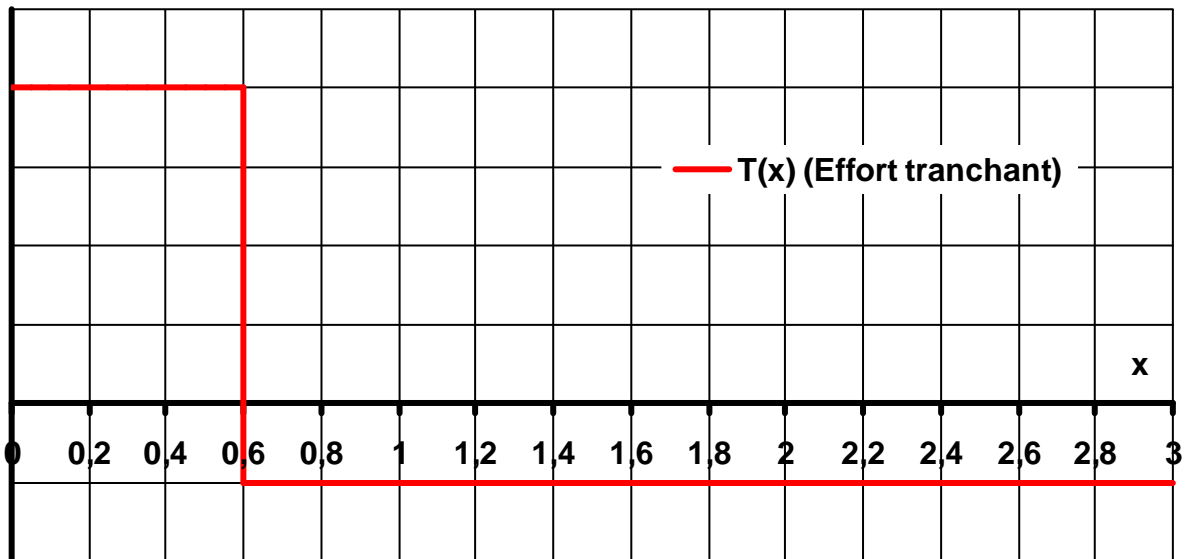
Tronçon 2 ( $a < x < L$ ) :  $T(x) = -P_0$

Tronçon 1 ( $0 < x < a$ ) :  $T(x) = -P_0 + R_{BY}$

$$\begin{cases} T(x) = P_0 \left( \frac{L}{a} - 1 \right) & \text{pour } 0 < x < a \\ T(x) = -P_0 & \text{pour } a < x < L \end{cases}$$

**CP46 – Automne 2007**  
**Corrigé de l'Examen FINAL**  
**23/01/2008**

Graphe tracé avec les valeurs de x de l'application numérique de la question 1.14 .



Question 1.3

Le moment résultant du torseur des efforts exercés en une section par l'aval sur l'amont ne possède ici qu'une composante suivant z, appelée "Moment fléchissant".

Son évolution est décrite par 2 équations différentes le long des 2 tronçons de la poutre définis sur le croquis.

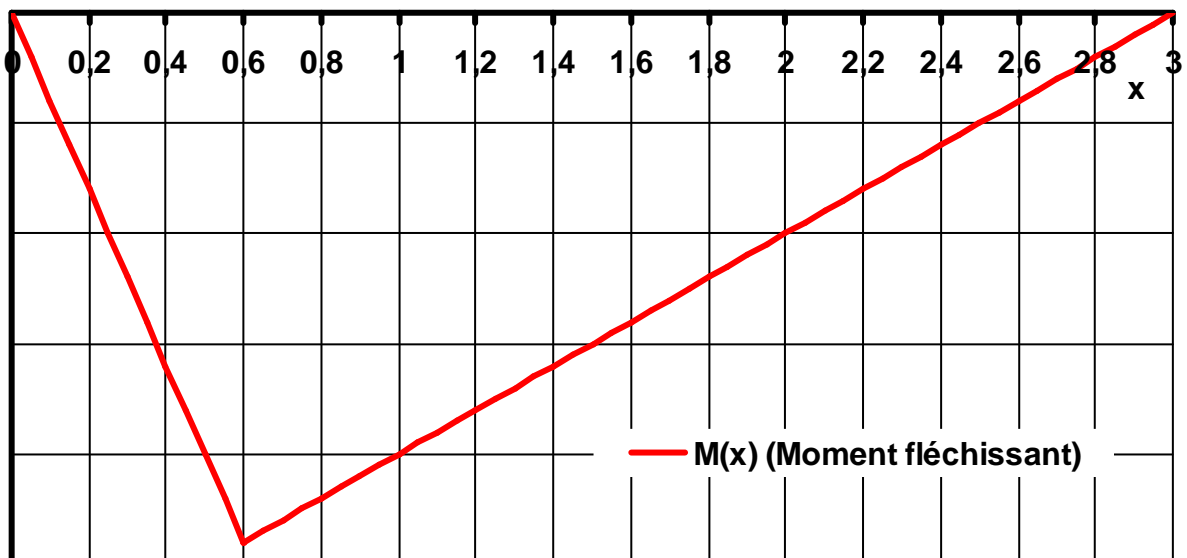
Tronçon 2 :  $M(x) = -P_0(L - x)$

Tronçon 1 :  $M(x) = -P_0(L - x) + R_{AY}(a - x)$

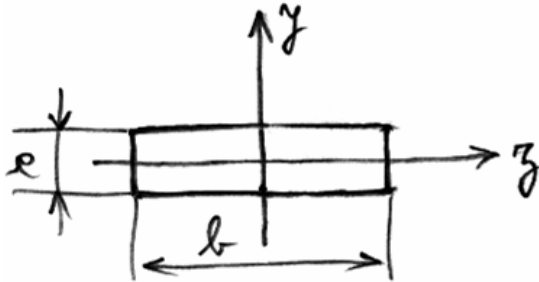
$$\begin{cases} M(x) = P_0 x \left(1 - \frac{L}{a}\right) & \text{pour } 0 < x < a \\ M(x) = -P_0(L - x) & \text{pour } a < x < L \end{cases}$$

Valeur particulière :  $M(a) = -P_0(L - a)$

Graphe tracé avec les valeurs de x de l'application numérique de la question 1.14 .



Question 1.4



Le moment quadratique I de la section S par rapport à l'axe z est défini par :

$$I = \iint_S y^2 ds$$

$$I = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-e/2}^{e/2} y^2 dy dz$$

$$I = \frac{b e^3}{12}$$

Question 1.5

Equation différentielle permettant de déterminer le déplacement  $V(x)$  de la poutre en fonction du moment  $M(x)$  et faisant intervenir le moment d'inertie I de la section et le module d'Young E du matériau :

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

Question 1.6

Notations :

$$V_1(x) = V(x) \quad \text{et} \quad \omega_1(x) = \frac{dV(x)}{dx} \quad \text{pour} \quad 0 < x < a$$

$$V_2(x) = V(x) \quad \text{et} \quad \omega_2(x) = \frac{dV(x)}{dx} \quad \text{pour} \quad a < x < L$$

Les conditions aux limites à respecter pour la déformée sont :

$$\begin{cases} V_1(0) = 0 \\ V_1(a) = 0 \\ V_2(a) = 0 \\ \omega_1(a) = \omega_2(a) \end{cases}$$

Question 1.7

Intégration sur le tronçon 1 ( $0 < x < a$ )

$$\frac{d^2V_1(x)}{dx^2} = \frac{P_0 x}{EI} \left(1 - \frac{L}{a}\right)$$

$$\frac{dV_1(x)}{dx} = \frac{P_0 x^2}{2EI} \left(1 - \frac{L}{a}\right) + C_1$$

$$V_1(x) = \frac{P_0 x^3}{6EI} \left(1 - \frac{L}{a}\right) + C_1 x + C_2$$

La condition  $V_1(0) = 0$  impose  $C_2 = 0$

La condition  $V_1(a) = 0$  impose  $C_1 = -\frac{P_0 a^2}{6EI} \left(1 - \frac{L}{a}\right)$

$$\omega_1(x) = \frac{P_0}{6EI} (3x^2 - a^2) \left(1 - \frac{L}{a}\right)$$

$$V_1(x) = \frac{P_0 x}{6EI} (x^2 - a^2) \left(1 - \frac{L}{a}\right)$$

Intégration sur le tronçon 2 ( $a < x < L$ )

$$\frac{d^2V_2(x)}{dx^2} = \frac{P_0}{EI} (x - L)$$

$$\frac{dV_2(x)}{dx} = \frac{P_0}{EI} \left(\frac{x^2}{2} - Lx\right) + C_3$$

$$V_2(x) = \frac{P_0}{EI} \left(\frac{x^3}{6} - L\frac{x^2}{2}\right) + C_3 x + C_4$$

La condition  $\omega_2(a) = \omega_1(a)$  permet de calculer  $C_3$ , connaissant  $\omega_1(a) = \frac{P_0 a^2}{3EI} \left(1 - \frac{L}{a}\right)$

$$C_3 = \frac{P_0 a}{6EI} (4L - a)$$

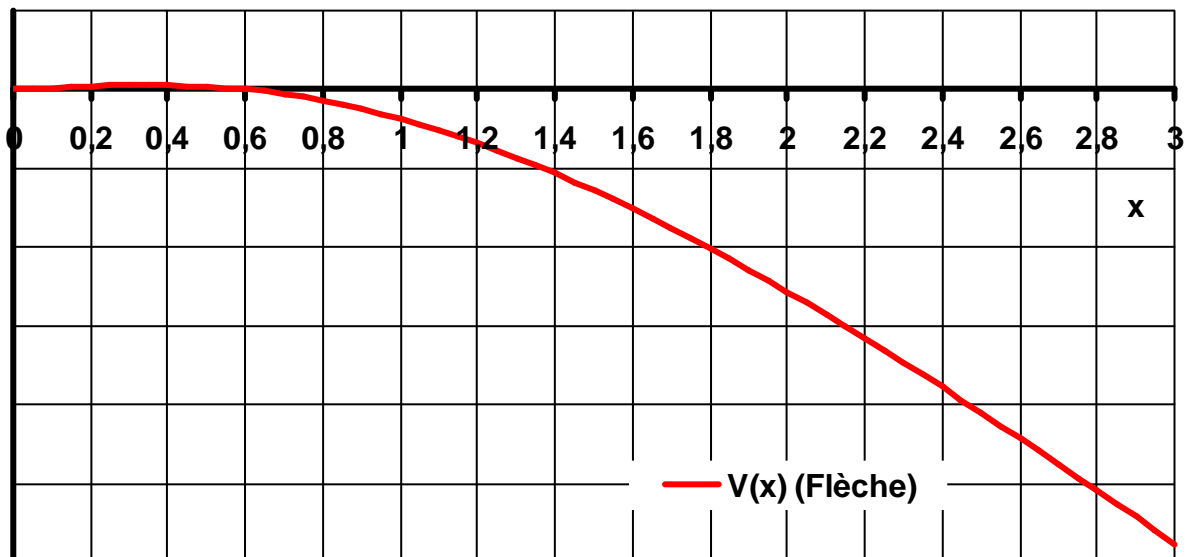
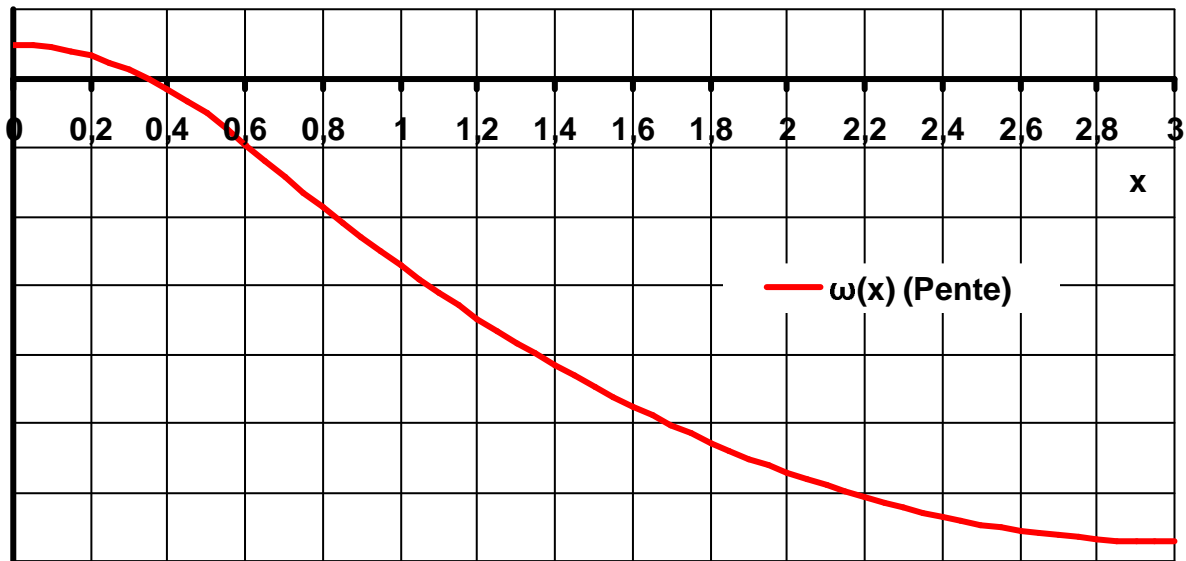
La condition  $V_2(a) = 0$  permet de calculer  $C_4 = -\frac{P_0 a^2 L}{6EI}$

$$\omega_2(x) = \frac{P_0}{6EI} (3x^2 - 6Lx + 4La - a^2)$$

$$V_2(x) = \frac{P_0}{6EI} [x^3 - 3Lx^2 + ax(4L - a) - La^2]$$



Graphes tracés avec les valeurs de x de l'application numérique de la question 1.14 .



Question 1.8

La formule trouvée à la question 1.7 donne, pour  $x = L$  :

$$V(L) = -\frac{P_0 L}{3EI} (L-a)^2$$

$$\text{D'où } K = \frac{3EI}{L(L-a)^2}$$

Ou, en tenant compte de  $I = \frac{be^3}{12}$ , résultat de la question 1.4.

$$K = \frac{be^3 E}{4L(L-a)^2}$$

Question 1.9

La définition  $K = \frac{-P_0}{V(L)}$  donne directement l'expression de  $y_0$ .

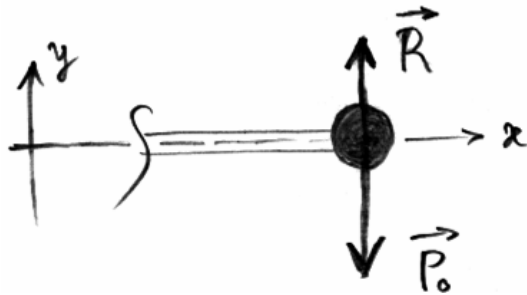
Le déplacement étant proportionnel à l'effort appliqué,  $y_0 + y_1$  et  $y$  en général s'en déduisent.

$$y_0 = -\frac{P_0}{K}$$

$$y_0 + y_1 = -\frac{P_0 + P_1}{K}$$

$$y = \frac{F}{K}$$

Question 1.10



La masse est à tout instant soumise à son poids  $\vec{P}_0$  et à une force  $\vec{R}$  exercée par la planche.

Ces deux efforts n'ont qu'une composante suivant la direction  $y$ .

Poids :  $-P_0$

Force exercée par la planche dont l'extrémité est en  $y$  :  $-K y$

$$\Sigma F = -P_0 - K y$$

Question 1.11

Principe fondamental de la dynamique appliqué au point de masse  $M$  :  $\Sigma F = M \frac{d^2 y}{dt^2}$

D'où l'équation différentielle.

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} = -P_0 - K y$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{K}{M} y = -\frac{P_0}{M}$$

Question 1.12

Solution générale de l'équation sans second membre :  $y(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ , avec  $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$

Solution particulière de l'équation complète :  $y(t) = -\frac{P_0}{K}$  ou  $y(t) = y_0$

Solution générale de l'équation complète :  $y(t) = y_0 + A \cos(\omega t + \varphi)$

Conditions initiales : à l'instant  $t = 0$ , la masse ...

... a une vitesse  $\frac{dy}{dt}(0) = 0$ , ce qui implique  $\varphi = 0$

... et occupe la position  $y(0) = y_0 + y_1$ , ce qui implique  $A = y_1$

**CP46 – Automne 2007**  
**Corrigé de l'Examen FINAL**  
**23/01/2008**

D'où l'équation du mouvement :

$$y(t) = y_0 + y_1 \cos(\omega t) \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

Il s'agit bien d'un mouvement périodique, dont la période T se déduit de la pulsation  $\omega$ .  
T est en effet la période du mouvement si  $\omega T = 2 \pi$ .

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{M}{K}}$$

Question 1.13

L'expression de T demandée se déduit des résultats des questions 1.12 et 1.8.

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{M}{K}} \quad \text{et} \quad K = \frac{b e^3 E}{4 L (L - a)^2}$$

$$T = 4 \pi (L - a) \sqrt{\frac{ML}{b e^3 E}}$$

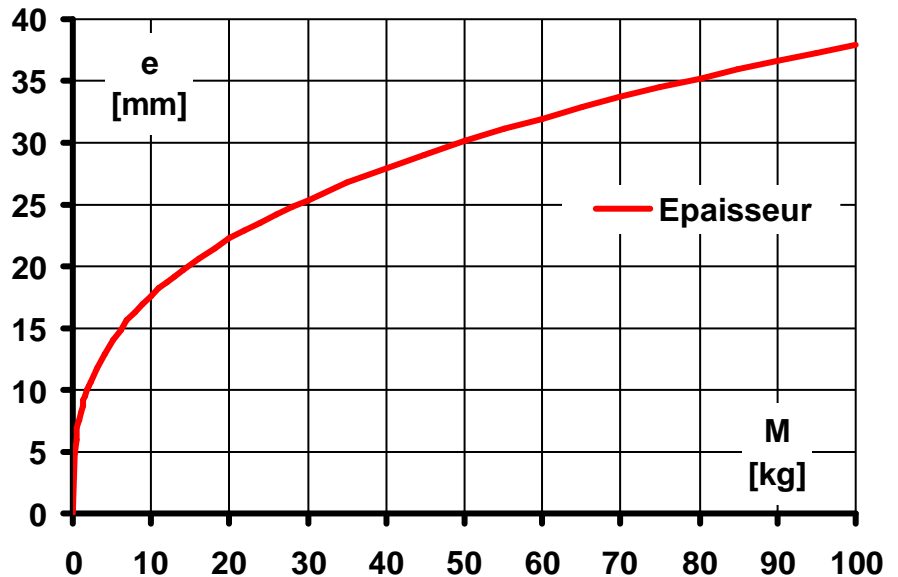
D'où la valeur de e qui permet d'obtenir la période T.

$$e = \sqrt[3]{\frac{16 \pi^2 ML (L - a)^2}{b E T^2}}$$

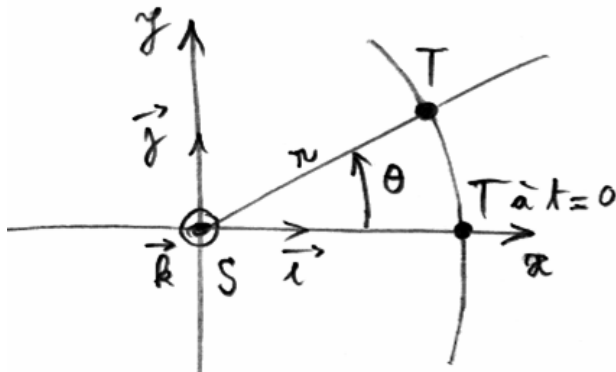
Question 1.14

Quelques valeurs de e en fonction de M et graphe des évolutions e(M).

M [kg]	e [mm]
10	17,6
20	22,2
30	25,4
40	27,9
50	30,1
60	32,0
70	33,7
80	35,2
90	36,6
95	37,3
100	37,9



Question 2.1



Equations du mouvement de la terre en coordonnées polaires, puis cartésiennes, dans le plan  $(S, \vec{i}, \vec{j})$  :

$$\begin{cases} r = R_s \\ \theta = \Omega_s t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = R_s \cos(\Omega_s t) \\ y = R_s \sin(\Omega_s t) \end{cases}$$

x et y représentent également les coordonnées du vecteur position  $\vec{ST}$ .

Question 2.2

Le vecteur vitesse  $\vec{V}_T$  est la dérivée par rapport au temps du vecteur position  $\vec{ST}$ .

$$\vec{V}_T = \frac{d\vec{ST}}{dt}$$

$$\vec{V}_T = \begin{pmatrix} -R_s \Omega_s \sin(\Omega_s t) \\ R_s \Omega_s \cos(\Omega_s t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où l'énergie cinétique de la terre considérée comme un point :

$$E_{C1} = \frac{1}{2} M \vec{V}_T^2$$

$$E_{C1} = \frac{1}{2} M R_s^2 \Omega_s^2$$

Question 2.3

Le vecteur accélération  $\vec{\Gamma}_T$  est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse  $\vec{V}_T$ .

$$\vec{\Gamma}_T = \frac{d\vec{V}_T}{dt}$$

$$\vec{\Gamma}_T = \begin{pmatrix} -R_s \Omega_s^2 \cos(\Omega_s t) \\ -R_s \Omega_s^2 \sin(\Omega_s t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Question 2.4

Principe fondamental de la dynamique pour un point de masse constante M subissant une accélération  $\vec{\Gamma}_T$  sous l'effet d'une force  $\vec{F}$  :

$$\vec{F} = M \vec{\Gamma}_T$$

Le point T représentant la terre est donc soumis à une force  $\vec{F} = M \vec{\Gamma}_T$

Cette force, qui est en fait l'attraction exercée par le soleil sur la terre, peut aussi s'écrire :

$$\vec{F} = -M \Omega_s^2 \vec{ST}$$

Question 2.5

La résultante du torseur cinématique est le vecteur rotation  $\vec{\Omega}_T$  du solide terre, déterminé par la figure de l'énoncé.

Le moment résultant au point T est la vitesse  $\vec{V}_T$  de ce point, calculée à la question 2.2.

$$\left\{ \mathbf{V} \right\}_T = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_T \\ \vec{V}_T \end{array} \right\} \quad \text{avec} \quad \vec{\Omega}_T = \begin{pmatrix} \Omega_T \sin \alpha \\ 0 \\ \Omega_T \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{V}_T = \begin{pmatrix} -R_S \Omega_S \sin(\Omega_S t) \\ R_S \Omega_S \cos(\Omega_S t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Question 2.6

La vitesse  $\vec{V}_U$  du point U est déduite de la relation générale liant les moments d'un torseur.

$$\vec{V}_U = \vec{V}_T + \vec{\Omega}_T \wedge \vec{TU}$$

La figure de l'énoncé permet de situer le point U dans le repère  $(T, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , donc de connaître le vecteur  $\vec{TU}$  à  $t = 0$ .

L'équation ci-dessus s'écrit alors :

$$\vec{V}_U = \begin{pmatrix} 0 \\ R_S \Omega_S \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Omega_T \sin \alpha \\ 0 \\ \Omega_T \cos \alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_T \cos(\varphi - \alpha) \\ 0 \\ R_T \sin(\varphi - \alpha) \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_U = (R_S \Omega_S + R_T \Omega_T \cos \varphi) \vec{j}$$

Question 2.7

Le moment d'inertie I de la sphère homogène par rapport à un axe passant par son centre se déduit de son moment d'inertie  $I_T$  par rapport à son centre T.

$$I_T = \rho \iiint_{\text{Sphère}} r^2 \, dv$$

Intégration en coordonnées sphériques :

$$I_T = \rho \int_0^{RT} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^4 \cos \varphi \, d\varphi \right) d\theta \right) dr$$

$$I_T = \frac{4}{5} \pi \rho R_T^5$$

Un calcul analogue fournit la masse :  $M = \frac{4}{3} \pi \rho R_T^3$

Doù :  $I_T = \frac{3}{5} M R_T^2$

Compte tenu des symétries, ...

... le moment d'inertie  $I_p$  par rapport à un plan contenant le centre est  $I_p = \frac{1}{3} I_T$

... et le moment d'inertie I par rapport à un axe passant par le centre est  $I = 2 I_p$ .

D'où finalement :

$$I = \frac{2}{5} M R_T^2$$

Question 2.8

La résultante cinétique d'un solide est toujours égale au produit du vecteur vitesse du centre de gravité par la masse.

$$\vec{S}_C = M \vec{V}_T$$

Dans le cas particulier d'un solide en rotation autour d'un de ses axes principaux d'inertie (ce qui est le cas ici), le moment cinétique au centre de gravité est égal au produit du vecteur rotation par le moment d'inertie par rapport à l'axe concerné.

$$\vec{\sigma}_T = I \vec{\Omega}_T$$

D'où le torseur cinétique au point T :

$$\{ C \}_T = \begin{Bmatrix} \vec{S}_C \\ \vec{\sigma}_T \end{Bmatrix} \text{ avec } \vec{S}_C = \begin{pmatrix} -MR_s \Omega_s \sin(\Omega_s t) \\ MR_s \Omega_s \cos(\Omega_s t) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{\sigma}_T = \begin{pmatrix} I \Omega_T \sin \alpha \\ 0 \\ I \Omega_T \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Question 2.9

Deuxième théorème de Koenig : L'énergie cinétique d'un système quelconque est égale à l'énergie cinétique du mouvement d'ensemble (c'est-à-dire du mouvement du barycentre affecté de toute la masse du système, dans le repère absolu considéré) augmentée de l'énergie cinétique interne (c'est-à-dire calculée dans le repère centré au barycentre et dont les vecteurs de base sont parallèles à ceux du repère absolu).

$$E_{C2} = \frac{1}{2} \left( M \vec{V}_T^2 + \vec{\Omega}_T \cdot \overline{I}_T \vec{\Omega}_T \right)$$

Compte tenu des symétries de la sphère :  $\vec{\Omega}_T \cdot \overline{I}_T \vec{\Omega}_T = I \Omega_T^2$

Finalement, en remplaçant  $\vec{V}_T$  et  $I$  par leurs expressions précédemment établies :

$$E_{C2} = \frac{M}{2} \left( R_s^2 \Omega_s^2 + \frac{2}{5} R_T^2 \Omega_T^2 \right)$$

Question 2.10

$$E_{C1} = 2,64930 \cdot 10^{33} \text{ J}$$

$$E_{C2} - E_{C1} = \frac{1}{5} M R_T^2 \Omega_T^2$$

$$E_{C2} - E_{C1} = 2,56 \cdot 10^{29} \text{ J} \text{ soit } 10^{-4} E_{C1}$$

$$E_{C2} = 2,64956 \cdot 10^{33} \text{ J}$$

$$V_T = 29782 \text{ m/s} \text{ ou } 107214 \text{ km/h}$$

$$V_U - V_T = R_T \Omega_T \cos \varphi$$

$$V_U - V_T = 312 \text{ m/s} \text{ ou } 1125 \text{ km/h} \text{ soit } 10^{-2} V_T$$

$$V_U = 30094 \text{ m/s} \text{ ou } 108339 \text{ km/h}$$