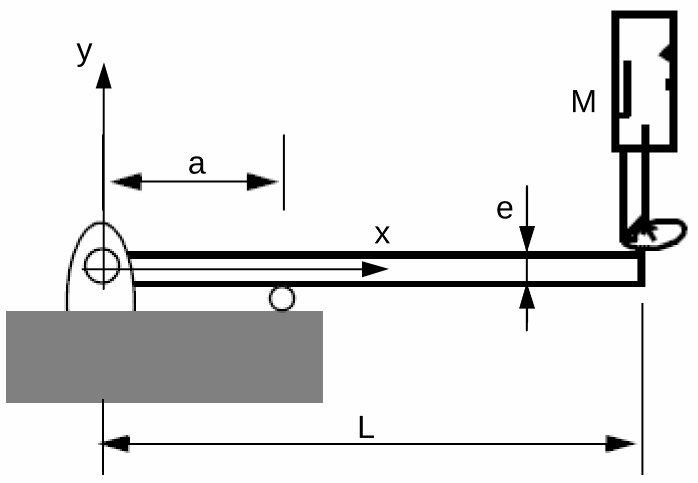
CP46 – Automne 2007
Sujet de l'Examen FINAL
23/01/2008

2 exercices indépendants - Durée : 2 h - Documents autorisés

1. **Le plongeoir personnalisé.**



L'illustration ci-contre, extraite de [1], vous représente schématiquement sur votre plongeoir personnel, que vous vous proposez de dimensionner.
La planche du plongeoir est fixée au bord de la piscine, en son extrémité gauche, par l'intermédiaire d'une rotule et repose sur un appui simple situé à une distance a de cette extrémité.
Elle est considérée comme une poutre droite de longueur L et de section rectangulaire constante b x e.
Vous admettez que vous pouvez être modélisé(e) par une masse ponctuelle M positionnée à l'extrémité libre de la planche (dont la masse propre peut être négligée).
Toutes les dimensions sont fixées, sauf l'épaisseur e de la planche, que vous souhaitez choisir de façon à ce que le système oscille avec une période T donnée.

1.1. Représenter schématiquement la poutre à étudier, repérée comme sur l'illustration, avec ses appuis et les efforts à prendre en compte.
Compte tenu de l'accélération g de la pesanteur terrestre, votre poids agit dans la direction y, vers le bas, avec un module $P_0 = Mg$.
Ecrire les équations traduisant l'équilibre de la poutre lorsque vous êtes immobile en son extrémité et en déduire la valeur de tous les efforts agissant alors sur la poutre.

1.2. La théorie des poutres définit plusieurs sortes d'efforts agissant dans une section ; dans ce cas particulier, comment s'appelle l'effort qui apparaît ?
Donner son équation et représenter schématiquement ses évolutions en fonction de x.

1.3. La théorie des poutres définit plusieurs sortes de moments agissant dans une section ; dans ce cas particulier, comment s'appelle le moment M qui apparaît ?
Donner son équation et représenter schématiquement ses évolutions en fonction de x.

1.4. La déformation de la poutre sous l'effet de ce moment dépend d'un moment quadratique, ou moment d'inertie, I, caractérisant la section.
Démontrer la formule qui le donne en fonction des côtés e et b de la section.

1.5. Ecrire l'équation différentielle qui permet de déterminer le déplacement V(x) de la poutre en fonction du moment M(x).

1.6. Quelles sont les conditions aux limites qui permettent de résoudre cette équation ?

1.7. Calculer le déplacement V(x) de chaque section de la poutre sous l'effet de votre poids P_0, en ne tenant compte que du moment déterminé ci-dessus.

1.8. Constater que le déplacement de l'extrémité V(L) est proportionnel à P_0 et calculer la rigidité de la poutre $K = \frac{-P_0}{V(L)}$ en fonction uniquement de ses dimensions L, a, e et b, ainsi que du module d'Young du matériau qui la constitue.

1.9. Le déplacement V(L) de l'extrémité de la poutre dû à votre seul poids P_0 est maintenant appelé y_0.
Soit $y_0 + y_1$ le déplacement de l'extrémité de la poutre lorsque vous vous y tenez, immobile, avec un bébé de poids P_1 dans les bras.
Exprimer y_0 et $y_0 + y_1$ en fonction de K, P_0 et P_1.
Plus généralement, connaissant K, quel est le déplacement y de l'extrémité de la poutre lorsqu'un effort quelconque F lui est appliqué verticalement ?

1.10. A l'instant $t = 0$, le bébé saute à l'eau et le système masse + poutre se met en mouvement.
Quel est, à un instant ultérieur t quelconque, la résultante des efforts qui s'exercent sur la masse, qui est alors située en y ?

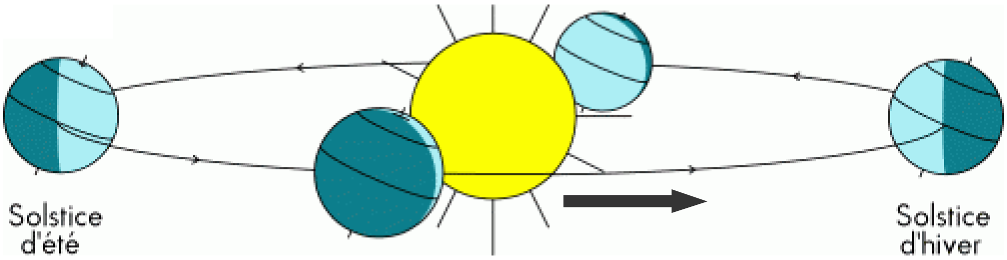
1.11. Quelle est l'équation différentielle qui régit alors le mouvement de la masse.

1.12. Résoudre cette équation et montrer que le mouvement est périodique.
Exprimer la période T en fonction de la masse M et de la rigidité K de la poutre.

1.13. Exprimer la période T en fonction des dimensions L, a, e et b de la poutre, de son module d'Young et de la masse M.
En déduire l'épaisseur e qui permet d'obtenir la valeur souhaitée de la période T du mouvement.

1.14. Application numérique.
M = votre masse personnelle.
$L = 3\,\text{m}$ $a = 0{,}6\,\text{m}$ $b = 0{,}5\,\text{m}$ $E = 10\,\text{GPa}$
Calculer l'épaisseur e qui est nécessaire pour que la période de vos oscillations soit $T = 1\,\text{s}$.

2. Les torseurs de la terre.



La figure ci-dessus, issue de [2], représente la terre en orbite autour du soleil.
Le but de l'exercice est d'appliquer certains résultats vus en mécanique du solide à la description du mouvement de la terre.
En première approximation, la terre est considérée comme un point pesant T, de masse M, décrivant un cercle de rayon R_S centré sur un point S, représentant le soleil et considéré comme immobile.

2.1. Représenter ce système simplifié, vu du dessus, par un croquis faisant apparaître un repère orthonormé direct $(S, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, où le plan $(S, \vec{i}, \vec{j})$ contient de la trajectoire de la terre et dont l'axe $(S, \vec{i})$ passe par la position de la terre au solstice d'hiver.
L'instant $t = 0$ est le solstice d'hiver.
A un instant t ultérieur quelconque, la position de la terre est repérée, en coordonnées polaires, par les paramètres classiques r et θ.

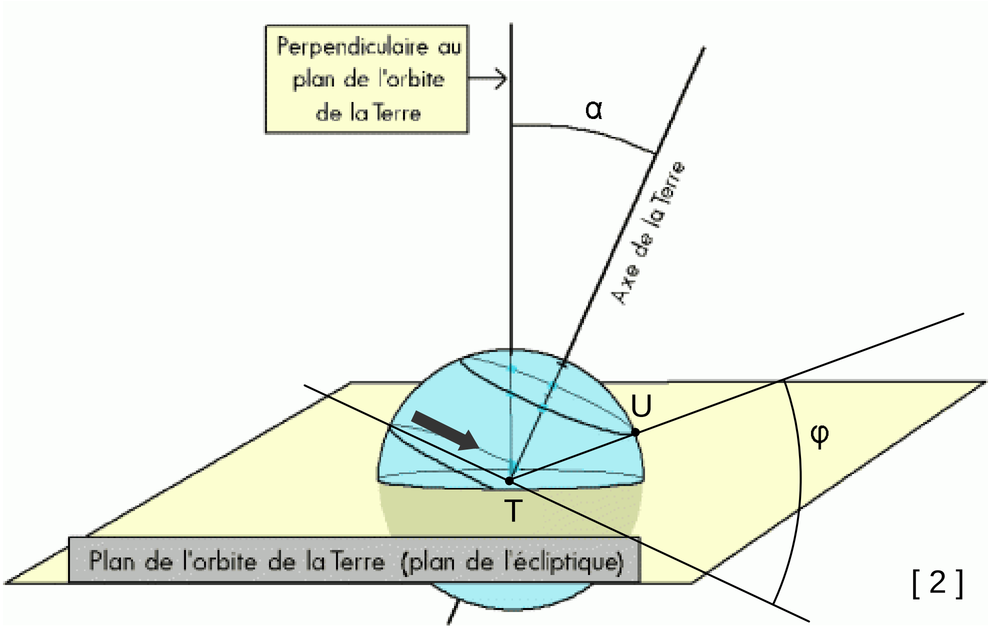
Sachant que la terre tourne autour du soleil avec une vitesse angulaire constante Ω_S, écrire les équations de son mouvement en coordonnées polaires, puis en coordonnées cartésiennes.

2.2. Quelles sont, dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les composantes du vecteur $\overrightarrow{V_T}$, vitesse de la terre ? Quelle est son énergie cinétique E_{C1} ?

2.3. Quelles sont, dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les composantes du vecteur $\overrightarrow{\Gamma_T}$, accélération de la terre ?

2.4. Que dit le principe fondamental de la dynamique appliqué au point T et que peut-on en déduire concernant un éventuel effort exercé sur ce point ?

Pour une modélisation un peu plus complète, la terre est maintenant considérée comme une sphère homogène de masse M et de rayon R_T, centrée sur le point T.
Elle est animée du mouvement de rotation autour du soleil déjà étudié et d'un mouvement de rotation propre autour d'un axe contenu dans le plan $(T, \vec{i}, \vec{k})$, faisant un angle α avec la direction $(T, \vec{k})$ (figure ci-dessous).
Soient $\overrightarrow{\Omega_S}$ et $\overrightarrow{\Omega_T}$ les vecteurs rotations caractérisant respectivement ces 2 mouvements.



2.5. Exprimer le torseur cinématique de la terre en son centre de gravité T.

2.6. L'UTBM, à Sévenans, est située à la surface de la terre en un point U repéré, par rapport à l'équateur, par sa latitude φ.
Quel est le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_U}$ de l'UTBM au milieu de nuit du solstice d'hiver $(t = 0)$, les points T et U étant alors dans le plan $(S, \vec{i}, \vec{k})$?

2.7. Montrer que le moment d'inertie de la terre par rapport à son axe de rotation vaut $I = \frac{2}{5} M R_T^2$.

2.8. Exprimer le torseur cinétique de la terre en son centre de gravité T, à un instant t quelconque.

2.9. Que dit le deuxième théorème de Koenig ?
Utiliser ce résultat pour calculer l'énergie cinétique de la terre E_{C2}.
Donner son expression en fonction seulement de M, R_S, R_T, Ω_S, et Ω_T.

2.10. Application numérique :

$R_S = 1{,}496.10^{11}$ m	$\Omega_S = 1$ tour / 365,3 jours	[3 - "Unité astronomique"]
$R_T = 6{,}371.10^{6}$ m		[3 - "Pesanteur"]
$M = 5{,}974.10^{24}$ kg	$\alpha = 23{,}44\,°$	[3 - "Terre"]
$\varphi = 47{,}59\,°$		[4]
$\Omega_T = 1$ tour / jour		

Calculer l'énergie cinétique E_{C1} de la terre considérée comme un point et l'énergie cinétique E_{C2} de la terre considérée comme une sphère.
Quelle est l'écart relatif entre ces 2 résultats ?
Calculer la vitesse du centre de gravité de la terre (point T) et la vitesse de l'UTBM (point U) au milieu de la nuit du solstice d'hiver.

Références

[1] - MIT OpenCourseWare
Problem Set #9 - 1.050 Solid Mechanics - Fall 2002
http://dspace.mit.edu/html/1721.1/36381/1-050Fall-2002/NR/rdonlyres/Civil-and-Environmental-Engineering/1-050Solid-MechanicsFall2002/54F98ABD-1F1F-44C5-8791-A67E558FEC35/0/pset02_9.pdf

[2] - Comité de Liaison Enseignants et Astronomes
La révolution de la terre
http://www.ac-nice.fr/clea/lunap/html/Revolution/RevolutionEnBref.html

[3] - Wikipédia
Bienvenue sur Wikipédia, l'encyclopédie libre et gratuite que chacun peut améliorer.
http://fr.wikipedia.org/

[4] - Carte de France : la France vue du Ciel Wikipédia
Carte de France : la France vue du Ciel
http://www.carte-france.info/