

3 exercices indépendants - Durée : 2 h - Documents autorisés

### 1. Le cube oscillant.

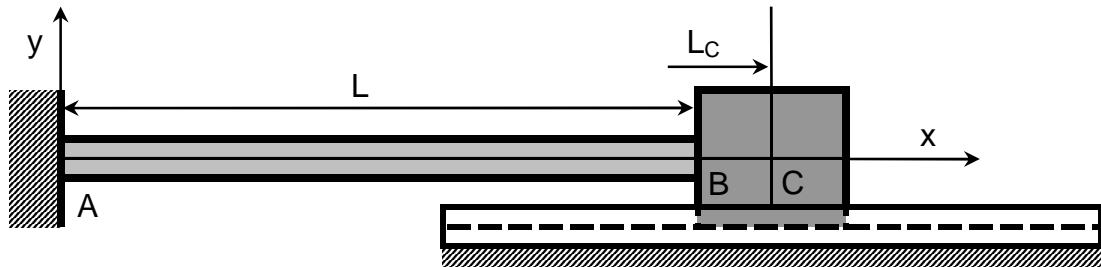


Fig. 1 : Le cube au bout du barreau élastique.

La Fig. 1 représente le montage à étudier.

Un cube indéformable de masse  $M$  est fixé à une extrémité d'un barreau AB, élastique, horizontal et rectiligne, dont l'autre extrémité est encastree.

Il peut se déplacer dans une glissière parfaite dont l'axe est parallèle à l'axe  $x$  du barreau.

Le barreau a une longueur  $L$ , une section constante  $S$ , un module d'Young  $E$ , une masse volumique nulle ; il sera considéré comme une poutre.

Le module de l'accélération de la pesanteur est  $g$  et sa direction est parallèle à l'axe  $y$ , vers le bas ( $y < 0$ ).

Un effort quelconque, dont la composante suivant  $x$  vaut  $F$ , est appliqué en un point quelconque du cube.

- 1.1. Quelles sont les valeurs des 6 composantes du tenseur représentant les efforts transmis par le cube au barreau ?
- 1.2. Quelles sont les valeurs des 6 composantes du tenseur de cohésion en une section quelconque du barreau ?
- 1.3. Quel est le déplacement  $U(x)$  (dans la direction  $x$ ) d'une section quelconque du barreau ?
- 1.4. Soit  $K = \frac{F}{U(L)}$  la rigidité du barreau en traction.

Donner l'expression de  $K$  en fonction de  $L$ ,  $S$  et  $E$ .

Sans effort extérieur, le centre de gravité  $C$  du cube est situé à l'abscisse  $x_C = L_C$ .

Il est amené à l'abscisse  $x_C = L_C + a$ , puis lâché sans vitesse initiale, à l'instant  $t = 0$ .

- 1.5. Quelle est l'équation différentielle à laquelle obéit le mouvement ultérieur du cube ?
- 1.6. Résoudre cette équation différentielle et donner  $x_C(t)$ , expression de l'abscisse du point  $C$  en fonction du temps.
- 1.7. Constater qu'il s'agit d'un mouvement périodique et donner l'expression de sa période  $T$  en fonction de  $S$ ,  $E$ ,  $L$  et  $M$ .
- 1.8. Application numérique :  
 $S = 100 \text{ mm}^2$                        $E = 4 \text{ MPa}$  (Caoutchouc [ 1 ])
   
 $L = 1 \text{ m}$                                $M = 1 \text{ kg}$ 
  
Calculer la période  $T$ .

2. La période du yoyo.

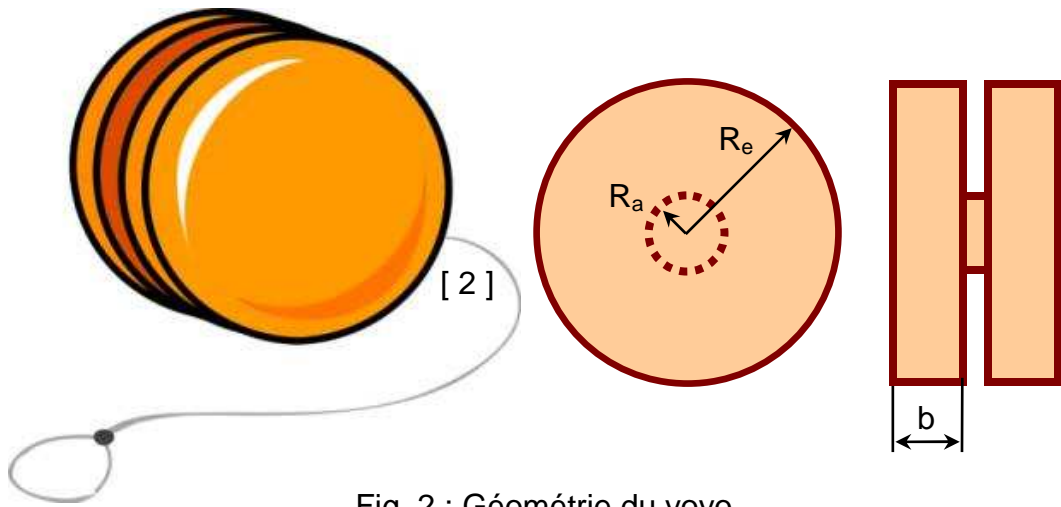


Fig. 2 : Géométrie du yoyo.

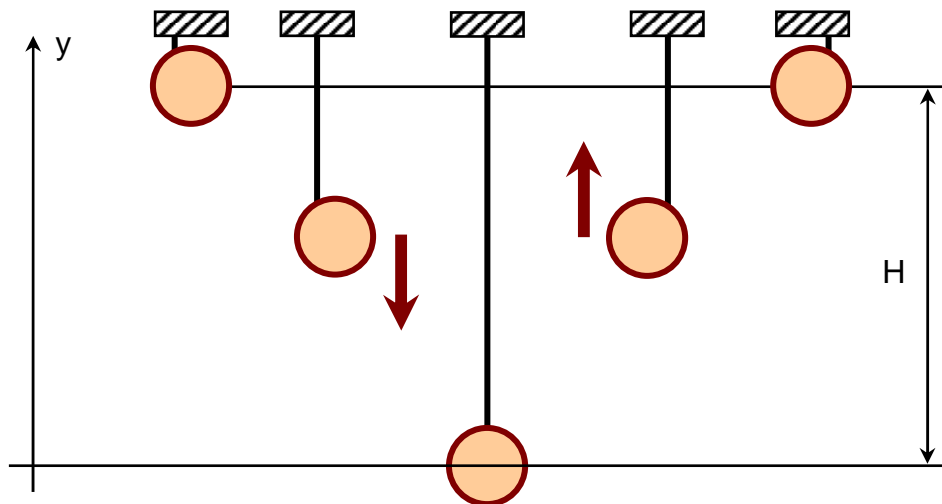


Fig. 3 : Mouvement du yoyo le long de sa ficelle (position haute – descente – position basse – remontée – position haute).

**CP46 – Automne 2008**  
**Corrigé de l'Examen FINAL**  
**21/01/2009**

Un yoyo est constitué de 2 disques pleins identiques reliés par un axe autour duquel s'enroule une ficelle (Fig. 2).

Le jeu consiste à saisir l'extrémité libre de la ficelle et à la maintenir à une position fixe, en laissant le yoyo descendre sous l'effet de son poids, puis remonter (Fig. 3).

L'exercice consiste à étudier le mouvement du yoyo dans des conditions idéales (aucune perte d'énergie par frottement, ficelle parfaitement flexible, inextensible et verticale pendant toutes les phases du mouvement).

- 2.1. En négligeant la contribution de l'axe et compte tenu des dimensions définies par la Fig. 2, ainsi que de sa masse  $M$ , calculer le moment d'inertie  $I$  du yoyo par rapport à son axe de symétrie (de révolution).

La descente du yoyo commence à l'instant  $t = 0$ , où il est lâché sans vitesse initiale, à une altitude  $y = H$ .

L'accélération de la pesanteur est dirigée vers le bas et a pour module  $g$ .

A un instant ultérieur  $t > 0$ , le yoyo est soumis à une accélération angulaire  $\theta''$  et son centre de gravité est soumis à une accélération linéaire  $y''$ .

- 2.2. Faire le bilan des efforts qui s'appliquent au yoyo et écrire l'équation qui relie ces efforts à l'accélération linéaire  $y''$ .
- 2.3. Faire le bilan des moments des efforts qui s'appliquent au yoyo (par rapport à son centre de gravité) et écrire l'équation qui relie ces moments à l'accélération angulaire  $\theta''$ .
- 2.4. En tenant d'autre part compte de la relation qui existe entre  $y''$  et  $\theta''$ , résoudre le système obtenu et exprimer  $y''$  en fonction de  $g$ ,  $R_a$  et  $R_e$  uniquement.
- 2.5. En déduire l'expression de  $y(t)$  et la durée de la descente, c'est-à-dire l'instant  $t_1$  tel que  $y(t_1) = 0$ .

A l'altitude  $y = 0$ , la ficelle est entièrement déroulée.

Comme le yoyo continue à tourner, il remonte le long de la ficelle.

Il sera admis qu'il n'y a pas de discontinuité de la vitesse de rotation, donc que le yoyo amorçe sa remontée avec la même vitesse de rotation que celle qu'il avait en atteignant le point  $y = 0$ .

- 2.6. Reprendre les questions 2.2 à 2.4 pour la phase de remontée et donner la nouvelle expression de  $y(t)$  valable pour cette phase.

Pour simplifier les écritures, on pourra poser  $A = 1 + \frac{R_e^2}{2R_a^2}$ .

- 2.7. A quel instant  $t_2$  le yoyo arrête-t-il de remonter et quelle altitude atteint-il ? Le mouvement est-il périodique et si oui, quelle est sa période ?

- 2.8. Application numérique :

$g = 9,81 \text{ m/s}^2$                        $R_e = 25 \text{ mm}$   
 $H = 1 \text{ m}$                                  $R_a = 3 \text{ mm}$   
Calculer  $t_2$ .

### 3. Toto jette une pierre depuis le manège.

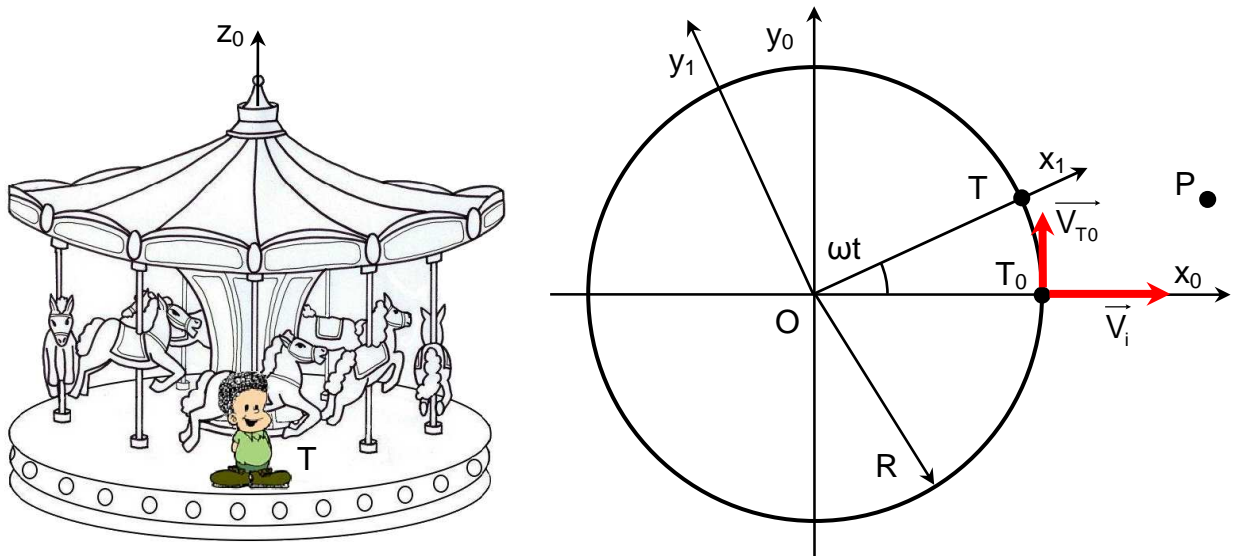


Fig. 4 : Le manège et Toto.

Un manège tourne autour de l'axe vertical  $Oz_0$  d'un repère fixe  $(O, x_0, y_0, z_0)$  avec une vitesse angulaire constante  $\omega$ .

Il est muni d'un repère mobile  $(O, x_1, y_1, z_1)$  ( $z_1$  est confondu avec  $z_0$ ).

Sur ce manège, Toto décrit, dans le repère fixe, un cercle de rayon  $R$  parallèle au plan  $Ox_0y_0$  (Fig. 4).

A l'instant  $t = 0$ , Toto (point T) passe sur l'axe  $Ox_0$  (au point  $T_0$ ) et jette une pierre (point P) en lui imposant une vitesse initiale  $\vec{V}_i$ , de module  $V_i$ , dans la direction  $Ox_1$ .

- 3.1. Quelles sont, à l'instant  $t = 0$ , les 3 composantes du vecteur vitesse  $\vec{V}_{T_0}$  de Toto dans le repère fixe  $(O, x_0, y_0, z_0)$  ?
- 3.2. Quelles sont, à l'instant  $t = 0$ , les 3 composantes du vecteur vitesse  $\vec{V}_{P_0}$  de la pierre que Toto vient de lancer, dans le repère fixe  $(O, x_0, y_0, z_0)$  ?

Compte tenu de cette vitesse initiale et de l'accélération de la pesanteur (dirigée vers le bas et de module  $g$ ) la pierre décrit ensuite une trajectoire.

- 3.3. Quelles sont, à un instant  $t > 0$  quelconque, les 3 coordonnées du point P représentant la pierre dans le repère fixe  $(O, x_0, y_0, z_0)$  ?
- 3.4. En appliquant les formules de changement de base au vecteur  $\vec{OP}$ , calculer les 3 coordonnées du point P représentant la pierre dans le repère mobile  $(O, x_1, y_1, z_1)$ .
- 3.5. Quelles sont alors les 3 composantes du vecteur vitesse du point P dans le repère mobile  $(O, x_1, y_1, z_1)$  ?
- 3.6. Quelles sont alors les 3 composantes du vecteur accélération du point P dans le repère mobile  $(O, x_1, y_1, z_1)$  ?
- 3.7. En déduire les 3 composantes du vecteur accélération du point P dans le repère mobile  $(O, x_1, y_1, z_1)$  à l'instant  $t = 0$ .
- 3.8. Retrouver le résultat de la question 3.7 en appliquant la formule générale de composition des accélérations.

### Références :

[ 1 ] – Choix des matériaux - Frogetech.  
Le blog du bureau d'études et du partage du savoir faire.  
<http://www.frogetech-blog.com/article-20079932.html>

[ 2 ] – How yo-yos work.  
A simple introduction from Explain that Stuff!  
<http://www.explainthatstuff.com/yoyos.html>

### Eléments de réponses

#### Question 1.1

La glissière est parfaite et ne possède que le degré de liberté en translation suivant x.  
Les réactions qu'elle exerce équilibrent donc tous les efforts et moments, sauf la composante de l'effort suivant x.  
D'où le torseur des efforts que le cube transmet au barreau :

$$\{ T_{\text{Cube} \rightarrow \text{Barreau}} \} = \begin{Bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

#### Question 1.2

La seule composante du torseur de cohésion est un effort normal égal à F.

$$\{ T_{\text{RDM}} \} = \begin{Bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

#### Question 1.3

L'effort normal et la section étant constants le long du barreau, il y apparaît une contrainte normale constante.

$$n_1 = \frac{F}{S}$$

Une déformation constante en découle.

$$e_1 = \frac{F}{E S}$$

Le déplacement d'une section s'en déduit par intégration.

$$U(x) = \frac{F}{E S} x$$

Question 1.4

U(L) et K se déduisent de ce qui précède.

$$U(L) = \frac{F}{E S} L$$

$$K = \frac{E S}{L}$$

Question 1.5

Quand le centre de gravité du cube occupe une position  $x_C$  quelconque, le barreau est allongé de  $x_C - L_C$ , donc exerce sur le cube un effort égal à  $-K (x_C - L_C)$ .

Le théorème de la résultante dynamique permet alors d'écrire l'équation différentielle qui régira le mouvement ultérieur du cube.

$$-K (x_C - L_C) = M x_C''$$

$$M x_C'' + K x_C = K L_C$$

Question 1.6

La solution s'obtient classiquement, en tenant compte de la condition initiale.

$$x_C = L_C + a \cos\left(\sqrt{\frac{K}{M}} t\right)$$

Question 1.7

La période T du mouvement se déduit de la période de la fonction cos.

$$\sqrt{\frac{K}{M}} T = 2 \pi$$

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{L M}{E S}}$$

Question 1.8

$$T = 0,314 \text{ s}$$

Question 2.1

Par définition du moment d'inertie :

$$I = \iiint_S \rho r^2 dv$$

Dans le cas des 2 disques, les coordonnées cylindriques s'imposent.

$$I = 2 \iiint_{\text{Disque}} \rho r^3 dr d\theta dz$$

$$I = \pi \rho b R_e^4$$

En faisant intervenir la masse  $M = 2 \pi \rho b R_e^2$  :

$$I = \frac{1}{2} M R_e^2$$

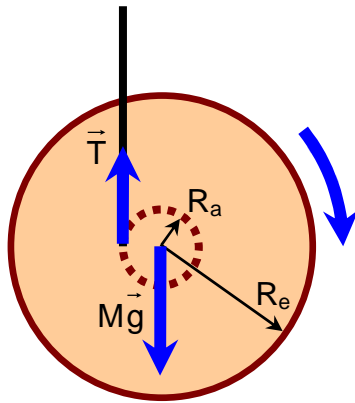


Fig. 5 : Le yo-yo en cours de descente

Question 2.2

Les efforts appliqués au yo-yo sont son poids  $M\vec{g}$  et la tension  $\vec{T}$  de la ficelle, qui n'ont chacun qu'une composante verticale (Fig. 5).

Le théorème de la résultante dynamique donne la relation qui lie l'effort résultant à l'accélération linéaire  $y''$ .

$$\boxed{T - Mg = M y''}$$

Question 2.3

Seule la tension de la ficelle induit un moment par rapport au centre de gravité du yo-yo.

Le théorème du moment dynamique donne la relation qui lie ce moment à l'accélération angulaire  $\theta''$ .

$$\boxed{-T R_a = I \theta''}$$

Question 2.4

L'enroulement de la ficelle autour de l'axe donne le lien entre  $\theta''$  et  $y''$ .

$$y'' = \theta'' R_a$$

Cette relation permet d'éliminer  $T$  du système des 2 équations trouvées aux questions précédentes et d'obtenir  $y''$  en fonction des paramètres connus.

$$\boxed{y'' = -g \left( 1 + \frac{R_e^2}{2R_a^2} \right)^{-1}}$$

Question 2.5

$y(t)$  est obtenu par 2 intégrations successives de  $y''$ , qui est une constante, par rapport au temps.

$$y'(t) = -g t \left( 1 + \frac{R_e^2}{2R_a^2} \right)^{-1} + C_1$$

Comme  $y'(0) = 0$ , la constante d'intégration  $C_1 = 0$ .

$$y(t) = -\frac{g}{2} t^2 \left( 1 + \frac{R_e^2}{2R_a^2} \right)^{-1} + C_2$$

Comme  $y(0) = H$ , la constante d'intégration  $C_2 = H$ .

$$\boxed{y(t) = -\frac{g}{2} t^2 \left( 1 + \frac{R_e^2}{2R_a^2} \right)^{-1} + H}$$

La condition  $y(t_1) = 0$  fournit directement  $t_1$ .

$$\boxed{t_1 = \sqrt{\frac{H}{g} \left( 2 + \frac{R_e^2}{R_a^2} \right)}}$$

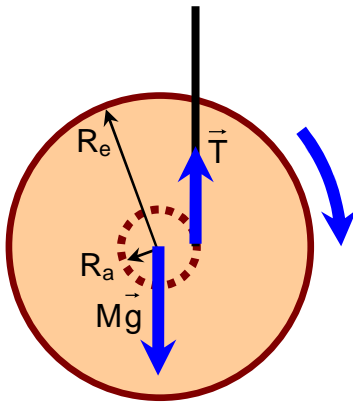


Fig. 6 : Le yoyo en cours de remontée

Question 2.6

La Fig. 6 permet de voir quelles différences s'introduisent dans les réponses des questions 2.2, 2.3 et 2.4.

$$T - Mg = My''$$

$$T R_a = I \theta''$$

$$y'' = -\theta'' R_a$$

Il apparaît que l'accélération  $y''$  est la même pendant la remontée que pendant la descente.

$$y'' = -g \left( 1 + \frac{R_e^2}{2R_a^2} \right)^{-1}$$

En posant  $A = 1 + \frac{R_e^2}{2R_a^2}$ ,  $y'' = -\frac{g}{A}$

$y(t)$  est encore obtenu par 2 intégrations successives de  $y''$ , mais avec des conditions initiales différentes.

Si à l'instant  $t_1 = \sqrt{\frac{2HA}{g}}$ , quand le yoyo arrive au bout de la ficelle, sa vitesse angulaire reste constante, sa vitesse linéaire change brusquement de signe.

A la fin de la descente :

$$y'(t_1) = -\sqrt{\frac{2gH}{A}}$$

Au même instant  $t_1$ , mais au début de la remontée :

$$y'(t_1) = \sqrt{\frac{2gH}{A}}$$

D'où les 2 intégrations successives de  $y''$  pour la phase de remontée.

$$y'(t) = -\frac{g}{A} t + C_3$$

Comme  $y'(t_1) = \sqrt{\frac{2gH}{A}}$ , la constante d'intégration  $C_3 = 2\sqrt{\frac{2gH}{A}}$ .

$$y'(t) = -\frac{g}{A} t + 2\sqrt{\frac{2gH}{A}}$$

$$y(t) = -\frac{g}{2A} t^2 + 2\sqrt{\frac{2gH}{A}} t + C_4$$

Comme  $y(t_1) = 0$ , la constante d'intégration  $C_4 = -3H$ .

$$y(t) = -\frac{g}{2A} t^2 + 2\sqrt{\frac{2gH}{A}} t - 3H$$



Question 2.7

Le yoyo s'arrêtera de remonter quand sa vitesse linéaire s'annulera.

$$y'(t_2) = 0$$

$$0 = -\frac{g}{A} t_2 + 2 \sqrt{\frac{2gH}{A}}$$

$$t_2 = 2 \sqrt{\frac{2HA}{g}}$$

$$y(t_2) = H$$

Comme  $t_2 = 2 t_1$ , la remontée aura duré le même temps que la descente.

A la fin de la remontée, le yoyo a retrouvé son altitude initiale, une nouvelle descente identique (symétrique à la première par rapport la ficelle) peut commencer.

Le mouvement est donc périodique et sa période est  $t_2$ .

Question 2.8

$$t_2 = 5,4 \text{ s}$$

Complément : les Fig. 7 et Fig. 8 illustrent le mouvement du yoyo sur 1,5 période.

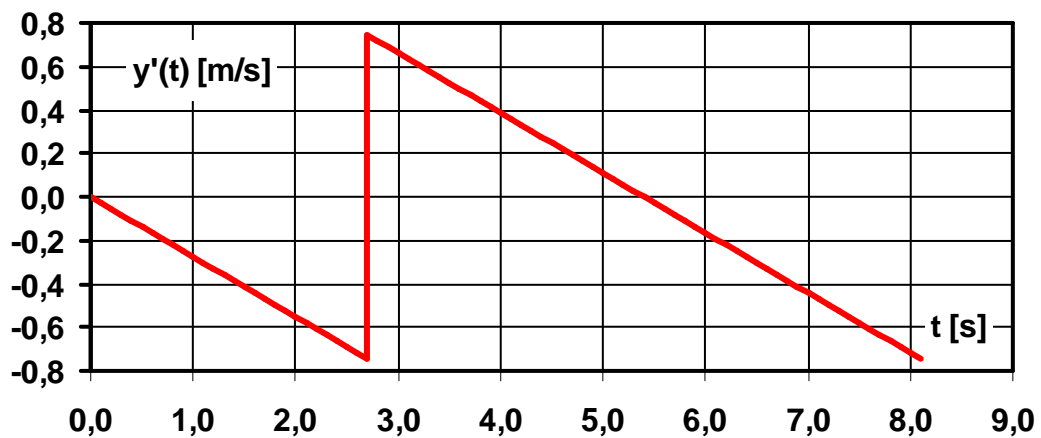


Fig. 7 : Variations de la vitesse linéaire du yoyo.

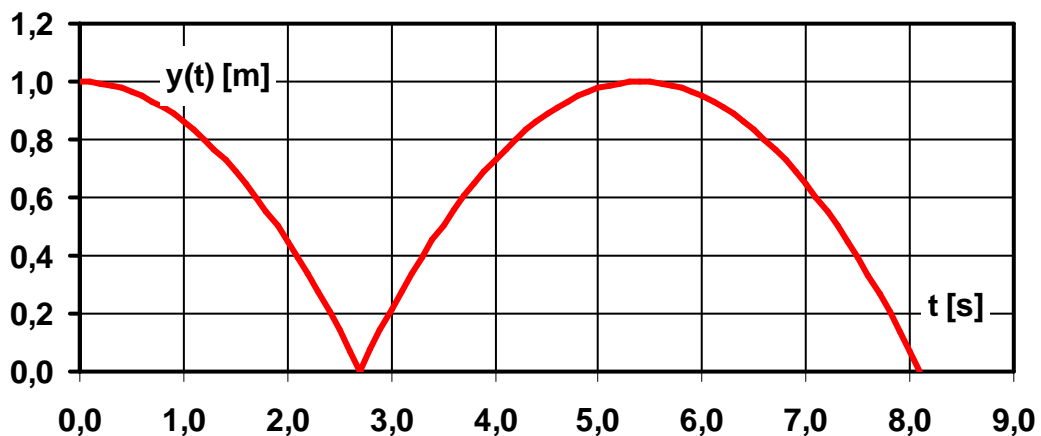


Fig. 8 : Variations de l'altitude du yoyo.

Question 3.1

Quand Toto passe sur le point  $T_0$ , son vecteur vitesse  $\vec{V}_{T_0}$  n'a qu'une composante tangentielle, proportionnelle au rayon  $R$  et à la vitesse de rotation  $\omega$ .

$$\vec{V}_{T_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega R \\ 0 \end{pmatrix}$$

Question 3.2

La vitesse initiale de la pierre lancée dans le repère fixe (vitesse absolue) est la somme de la vitesse de Toto (vitesse d'entraînement) et de la vitesse qu'il lui impose en la lançant (vitesse relative).

$$\vec{V}_{P_0} = \vec{V}_{T_0} + \vec{V}_i$$

$$\vec{V}_{P_0} = \begin{pmatrix} V_i \\ \omega R \\ 0 \end{pmatrix}$$

Question 3.3

Dans les 2 directions  $x_0$  et  $y_0$ , le mouvement de la pierre est uniforme.

Dans la direction  $z_0$ , sous l'effet de la pesanteur, le mouvement est uniformément accéléré.

En tenant compte des conditions initiales, la trajectoire de la pierre est décrite par les 3 équations suivantes :

$$\begin{cases} x_0(t) = R + V_i t \\ y_0(t) = \omega R t \\ z_0(t) = -g t^2 / 2 \end{cases}$$

Question 3.4

Les colonnes de la matrice de passage ( $P$ ) de la base fixe à la base mobile sont les vecteurs de la base mobile, exprimés dans la base fixe.

$$(P) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées d'un vecteur dans la base mobile s'obtiennent en multipliant ses coordonnées dans la base fixe par l'inverse de la matrice de passage (qui est égale à sa transposée).

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = (P)^{-1} \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ z_0(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R + V_i t \\ \omega R t \\ -g t^2 / 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = (R + V_i t) \cos(\omega t) + \omega R t \sin(\omega t) \\ y_1(t) = -(R + V_i t) \sin(\omega t) + \omega R t \cos(\omega t) \\ z_1(t) = -g t^2 / 2 \end{cases}$$

**Question 3.5**

Les 3 composantes du vecteur vitesse du point P dans le repère mobile (O, x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>, z<sub>1</sub>) sont obtenues par dérivation des 3 coordonnées du point P dans le même repère.

$$\begin{cases} x'_1(t) = V_i \cos(\omega t) - \omega V_i t \sin(\omega t) + \omega^2 R t \cos(\omega t) \\ y'_1(t) = -V_i \sin(\omega t) - \omega V_i t \cos(\omega t) - \omega^2 R t \sin(\omega t) \\ z'_1(t) = -g t \end{cases}$$

**Question 3.6**

Les 3 composantes du vecteur accélération du point P dans le repère mobile (O, x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>, z<sub>1</sub>) sont obtenues par dérivation des 3 composantes du vecteur vitesse du point P dans le même repère.

$$\begin{cases} x''_1(t) = -2 \omega V_i \sin(\omega t) + \omega^2 (R - V_i t) \cos(\omega t) - \omega^3 R t \sin(\omega t) \\ y''_1(t) = -2 \omega V_i \cos(\omega t) - \omega^2 (R - V_i t) \sin(\omega t) - \omega^3 R t \cos(\omega t) \\ z''_1(t) = -g \end{cases}$$

**Question 3.7**

Il suffit de faire t = 0 dans les équations précédentes.

$$\begin{cases} x''_1(0) = \omega^2 R \\ y''_1(0) = -2 \omega V_i \\ z''_1(0) = -g \end{cases}$$

**Remarques :**

- La composante de l'accélération suivant x<sub>1</sub> est l'opposé de l'accélération centripète que subit Toto, ce qui correspond au fait que la pierre est "libérée" de la rotation.
- La composante de l'accélération suivant y<sub>1</sub> provoquera une déviation vers la droite de la trajectoire de la pierre vue par Toto dans son repère mobile, c'est l'accélération de Coriolis.

**Question 3.8**

Formule générale de composition des accélérations appliquée au point P, évoluant dans un repère relatif R<sub>1</sub> et un repère absolu R<sub>0</sub> :

$$\vec{\Gamma}_{P/R_0} = \vec{\Gamma}_{O/R_0} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{OP} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OP}) + \vec{\Gamma}_{P/R_1} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{P/R_1}$$

$\vec{\Omega}$  est la vitesse de rotation de R<sub>1</sub> par rapport à R<sub>0</sub>, qui ne dépend pas du temps.

Le point O, centre du manège, est fixe dans R<sub>0</sub>.

$$\vec{\Gamma}_{P/R_1} = \vec{\Gamma}_{P/R_0} - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OP}) - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{P/R_1}$$

A l'instant t = 0, les vecteurs  $\vec{OP}$  et  $\vec{V}_{P/R_1}$  sont connus.

$\vec{\Gamma}_{P/R_0}$  ne correspond qu'à la pesanteur.

D'où l'écriture en coordonnées de l'équation précédente.

$$\begin{pmatrix} x_1''(0) \\ y_1''(0) \\ z_1''(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1''(0) = \omega^2 R \\ y_1''(0) = -2 \omega V_i \\ z_1''(0) = -g \end{cases}$$

**Complément :**

La formule de composition des accélérations est bien sûr valable à tout instant t.

En prenant en compte les résultats des questions 3.4 et 3.5, elle fournit le résultat de la question 3.6.

$$\begin{pmatrix} x_1''(t) \\ y_1''(t) \\ z_1''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} (R + V_i t) \cos(\omega t) + \omega R t \sin(\omega t) \\ -(R + V_i t) \sin(\omega t) + \omega R t \cos(\omega t) \\ -g t^2 / 2 \end{pmatrix} \right] - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_i \cos(\omega t) - \omega V_i t \sin(\omega t) + \omega^2 R t \cos(\omega t) \\ -V_i \sin(\omega t) - \omega V_i t \cos(\omega t) - \omega^2 R t \sin(\omega t) \\ -g t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1''(t) \\ y_1''(t) \\ z_1''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \omega V_i \sin(\omega t) + \omega^2 (R - V_i t) \cos(\omega t) - \omega^3 R t \sin(\omega t) \\ -2 \omega V_i \cos(\omega t) - \omega^2 (R - V_i t) \sin(\omega t) - \omega^3 R t \cos(\omega t) \\ -g \end{pmatrix}$$