CP46 – Automne 2008
Sujet de l'Examen FINAL
21/01/2009

3 exercices indépendants - Durée : 2 h - Documents autorisés

1. Le cube oscillant.

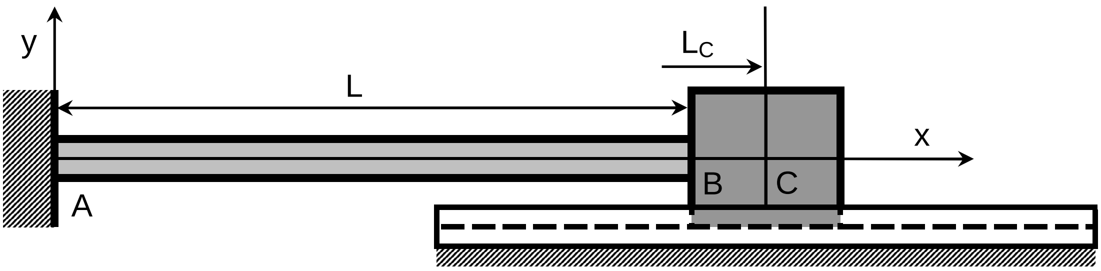

Fig. 1 : Le cube au bout du barreau élastique.

La Fig. 1 représente le montage à étudier.
Un cube indéformable de masse M est fixé à une extrémité d'un barreau AB, élastique, horizontal et rectiligne, dont l'autre extrémité est encastrée.
Il peut se déplacer dans une glissière parfaite dont l'axe est parallèle à l'axe x du barreau.
Le barreau a une longueur L, une section constante S, un module d'Young E, une masse volumique nulle ; il sera considéré comme une poutre.
Le module de l'accélération de la pesanteur est g et sa direction est parallèle à l'axe y, vers le bas ($y < 0$).
Un effort quelconque, dont la composante suivant x vaut F, est appliqué en un point quelconque du cube.

1.1. Quelles sont les valeurs des 6 composantes du torseur représentant les efforts transmis par le cube au barreau ?

1.2. Quelles sont les valeurs des 6 composantes du torseur de cohésion en une section quelconque du barreau ?

1.3. Quel est le déplacement U(x) (dans la direction x) d'une section quelconque du barreau ?

1.4. Soit $K = \dfrac{F}{U(L)}$ la rigidité du barreau en traction.
Donner l'expression de K en fonction de L, S et E.

Sans effort extérieur, le centre de gravité C du cube est situé à l'abscisse $x_C = L_C$.
Il est amené à l'abscisse $x_C = L_C + a$, puis lâché sans vitesse initiale, à l'instant $t = 0$.

1.5. Quelle est l'équation différentielle à laquelle obéit le mouvement ultérieur du cube ?

1.6. Résoudre cette équation différentielle et donner $x_C(t)$, expression de l'abscisse du point C en fonction du temps.

1.7. Constater qu'il s'agit d'un mouvement périodique et donner l'expression de sa période T en fonction de S, E, L et M.

1.8. Application numérique :
$S = 100\ mm^2$ E = 4 MPa (Caoutchouc)
L = 1 m M = 1 kg
Calculer la période T.

2. La période du yoyo.

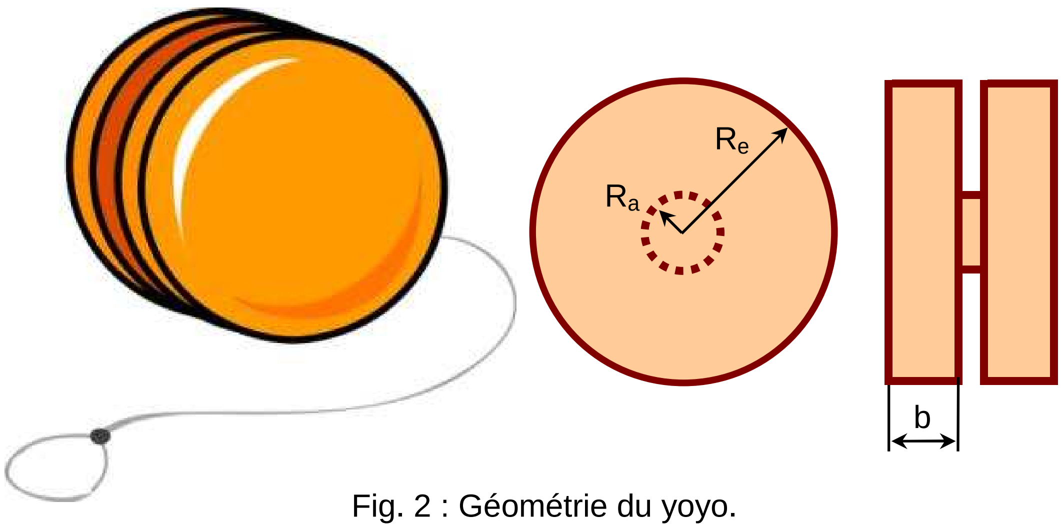

Fig. 2 : Géométrie du yoyo.

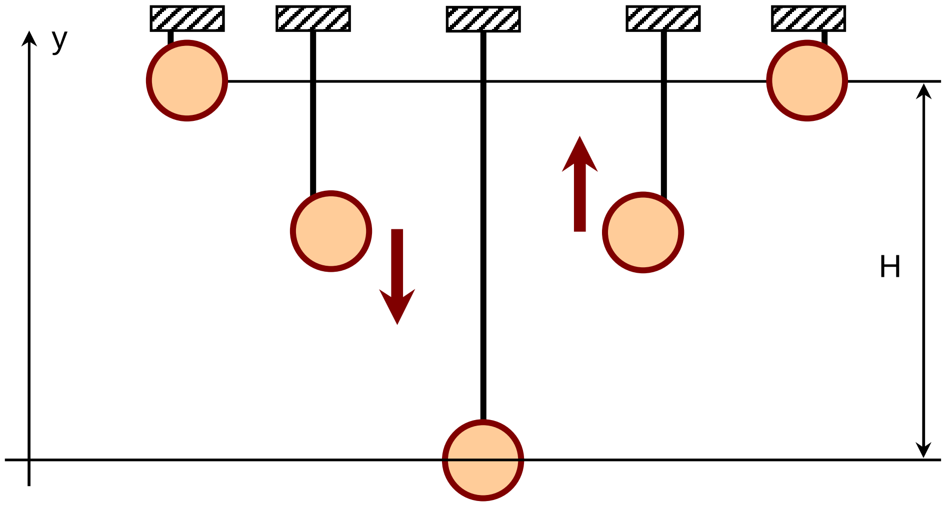

Fig. 3 : Mouvement du yoyo le long de sa ficelle
(position haute – descente – position basse – remontée – position haute).

CP46 – Automne 2008
Sujet de l'Examen FINAL
21/01/2009

Un yoyo est constitué de 2 disques pleins identiques reliés par un axe autour duquel s'enroule une ficelle (Fig. 2).
Le jeu consiste à saisir l'extrémité libre de la ficelle et à la maintenir à une position fixe, en laissant le yoyo descendre sous l'effet de son poids, puis remonter (Fig. 3).
L'exercice consiste à étudier le mouvement du yoyo dans des conditions idéales (aucune perte d'énergie par frottement, ficelle parfaitement flexible, inextensible et verticale pendant toutes les phases du mouvement).

2.1. En négligeant la contribution de l'axe et compte tenu des dimensions définies par la Fig. 2, ainsi que de sa masse M, calculer le moment d'inertie I du yoyo par rapport à son axe de symétrie (de révolution).

La descente du yoyo commence à l'instant $t = 0$, où il est lâché sans vitesse initiale, à une altitude $y = H$.
L'accélération de la pesanteur est dirigée vers le bas et a pour module g.
A un instant ultérieur $t > 0$, le yoyo est soumis à une accélération angulaire θ'' et son centre de gravité est soumis à une accélération linéaire y''.

2.2. Faire le bilan des efforts qui s'appliquent au yoyo et écrire l'équation qui relie ces efforts à l'accélération linéaire y''.

2.3. Faire le bilan des moments des efforts qui s'appliquent au yoyo (par rapport à son centre de gravité) et écrire l'équation qui relie ces moments à l'accélération angulaire θ''.

2.4. En tenant d'autre part compte de la relation qui existe entre y'' et θ'', résoudre le système obtenu et exprimer y'' en fonction de g, R_a et R_e uniquement.

2.5. En déduire l'expression de $y(t)$ et la durée de la descente, c'est-à-dire l'instant t_1 tel que $y(t_1) = 0$.

A l'altitude $y = 0$, la ficelle est entièrement déroulée.
Comme le yoyo continue à tourner, il remonte le long de la ficelle.
Il sera admis qu'il n'y a pas de discontinuité de la vitesse de rotation, donc que le yoyo amorce sa remonté avec la même vitesse de rotation que celle qu'il avait en atteignant le point $y = 0$.

2.6. Reprendre les questions 2.2 à 2.4 pour la phase de remontée et donner la nouvelle expression de $y(t)$ valable pour cette phase.

Pour simplifier les écritures, on pourra poser $A = 1 + \frac{R_e^2}{2\,R_a^2}$.

2.7. A quel instant t_2 le yoyo arrête-t-il de remonter et quelle altitude atteint-il ? Le mouvement est-il périodique et si oui, quelle est sa période ?

2.8. Application numérique :

$g = 9{,}81\ m/s^2$ $R_e = 25$ mm
$H = 1$ m $R_a = 3$ mm
Calculer t_2.

3. Toto jette une pierre depuis le manège.

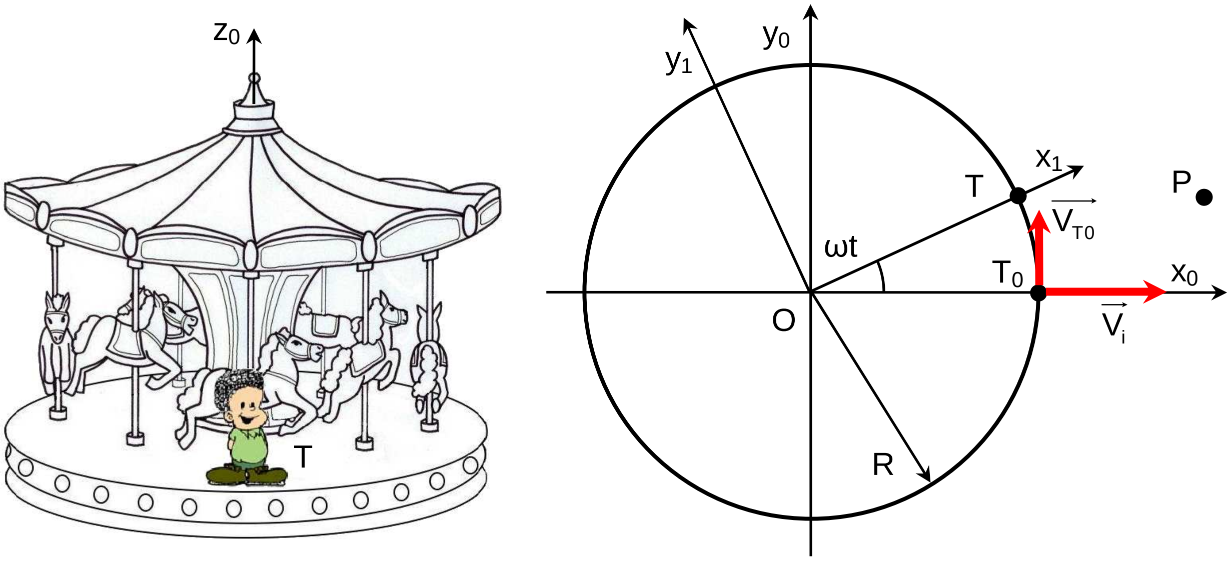

Fig. 4 : Le manège et Toto.

Un manège tourne autour de l'axe vertical Oz_0 d'un repère fixe (O, x_0, y_0, z_0) avec une vitesse angulaire constante ω.
Il est muni d'un repère mobile (O, x_1, y_1, z_1) (z_1 est confondu avec z_0).
Sur ce manège, Toto décrit, dans le repère fixe, un cercle de rayon R parallèle au plan Ox_0y_0 (Fig. 4).
A l'instant t = 0, Toto (point T) passe sur l'axe Ox_0 (au point T_0) et jette une pierre (point P) en lui imposant une vitesse initiale $\overrightarrow{V_i}$**,** de module V_i**,** dans la direction Ox_1.

3.1. Quelles sont, à l'instant t = 0, les 3 composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{T0}}$ de Toto dans le repère fixe (O, x_0, y_0, z_0) ?

3.2. Quelles sont, à l'instant t = 0, les 3 composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{P0}}$ de la pierre que Toto vient de lancer, dans le repère fixe (O, x_0, y_0, z_0) ?

Compte tenu de cette vitesse initiale et de l'accélération de la pesanteur (dirigée vers le bas et de module g) la pierre décrit ensuite une trajectoire.

3.3. Quelles sont, à un instant t > 0 quelconque, les 3 coordonnées du point P représentant la pierre dans le repère fixe (O, x_0, y_0, z_0) ?

3.4. En appliquant les formules de changement de base au vecteur $\overrightarrow{OP}$, calculer les 3 coordonnées du point P représentant la pierre dans le repère mobile (O, x_1, y_1, z_1).

3.5. Quelles sont alors les 3 composantes du vecteur vitesse du point P dans le repère mobile (O, x_1, y_1, z_1) ?

3.6. Quelles sont alors les 3 composantes du vecteur accélération du point P dans le repère mobile (O, x_1, y_1, z_1) ?

3.7. En déduire les 3 composantes du vecteur accélération du point P dans le repère mobile (O, x_1, y_1, z_1) à l'instant t = 0.

3.8. Retrouver le résultat de la question 3.7 en appliquant la formule générale de composition des accélérations.