

Durée : 2 h - Documents autorisés

## 1. Objet du problème - Préliminaires.

2 étudiants de MC terminent actuellement une UV TW51 dont le sujet avait été proposé par General Electric.

Il s'agissait de modéliser le comportement d'une maquette de rotor dont ils disposent pour la formation de leurs clients.

Pour valider des études plus compliquées, réalisées avec le logiciel de calculs par éléments finis ANSYS, 4 cas simples ont été traités analytiquement.

Ces cas simples sont les différentes oscillations à un degré de liberté d'un disque fixé au centre d'un arbre (Fig. 1).

Le sujet proposé ici conduit au calcul des 4 fréquences propres correspondantes.

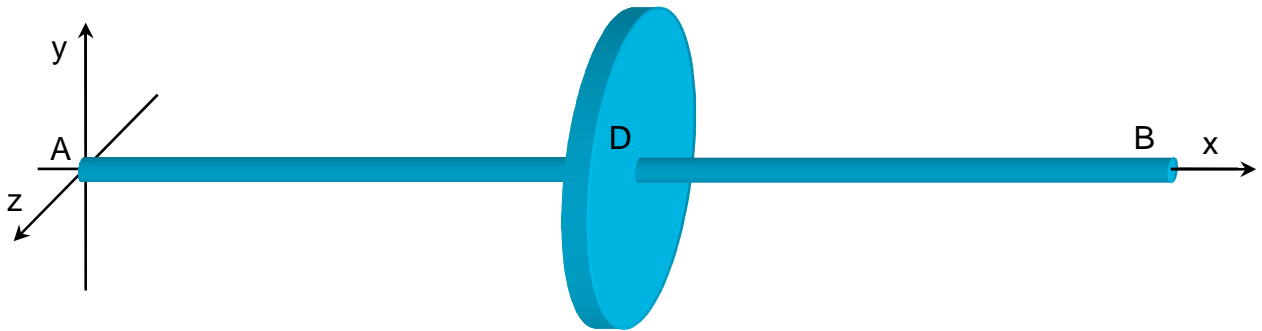


Fig. 1 : La maquette de rotor dans une configuration simple.

En ses extrémités A et B, l'arbre est supporté, horizontalement, par 2 paliers solidaires d'un bâti.

Pour cette étude, les seuls degrés de liberté du rotor par rapport au palier côté A sont les rotations autour de l'axe Az et autour de l'axe Ay.

Côté B, les trois rotations sont possibles, ainsi qu'une translation dans la direction x.

- 1.1. Quelles sont les 2 liaisons normalisées simples qui permettent ces ensembles de degrés de liberté (l'une côté A, l'autre côté B) ?

Ces liaisons seront considérées comme parfaites.

L'arbre et le disque sont en acier, de module d'Young E, de coefficient de Poisson  $\nu$  et de masse volumique  $\rho$ .

Cependant, pour une première approximation, la masse de l'arbre ne sera jamais prise en compte dans la suite du problème.

D'autre part, le disque sera considéré comme un solide indéformable.

## 2. Rigidités de l'arbre (sans le disque).

L'arbre est un cylindre élancé, de rayon  $r_A$ , de section  $s_A$  et de longueur  $2L$ , à considérer comme une poutre.

- 2.1. Démontrer la formule qui donne le moment d'inertie polaire  $i_0$  d'une section circulaire pleine de cette poutre en fonction de son rayon  $r_A$ .
- 2.2. En déduire l'expression du moment quadratique  $i_z$  de la même section par rapport à la direction z.

Rigidité en traction.

Un effort extérieur  $F_x$  est appliqué au point D, milieu de la poutre, suivant la direction x.

2.3. Calculer le déplacement longitudinal  $U_x(L)$  du point D et en déduire la rigidité

$$K_1 = \frac{F_x}{U_x(L)}.$$

Première rigidité en flexion.

Un effort extérieur  $F_y$  est appliqué au point D suivant la direction y.

2.4. Donner l'expression du moment fléchissant  $M_z(x)$  le long de la moitié AD de l'arbre, pour  $0 < x < L$ .

2.5. En tenant compte des conditions aux limites en A et D imposées par les données de ce cas de figure et par sa symétrie, déterminer le déplacement latéral  $U_y(L)$  du

point D et en déduire la rigidité  $K_2 = \frac{F_y}{U_y(L)}$ .

Rigidité en torsion.

Un moment extérieur  $C_x$  est appliqué au point D suivant la direction Dx.

2.6. Donner l'expression du moment de torsion  $M_x(x)$  le long de la moitié AD de l'arbre, pour  $0 < x < L$ .

2.7. Calculer la rotation  $\omega_x(L)$  de la section centrale de l'arbre autour de l'axe Dx et en déduire la rigidité  $K_3 = \frac{C_x}{\omega_x(L)}$  (qui dépendra du module de cisaillement G).

Deuxième rigidité en flexion.

Un moment extérieur  $C_z$  est appliqué au point D suivant la direction Dz.

2.8. Donner l'expression du moment fléchissant  $M_z(x)$  le long de la moitié AD de l'arbre, pour  $0 < x < L$ .

2.9. En tenant compte des conditions aux limites en A et D imposées par les données de ce cas de figure et par sa symétrie, déterminer la rotation  $\omega_z(L)$  de la section

centrale de l'arbre autour de l'axe Dz et en déduire la rigidité  $K_4 = \frac{C_z}{\omega_z(L)}$ .

**3. Mouvements oscillatoires du disque monté sur l'arbre.**

Le disque est un cylindre plat, de masse M, de rayon R et d'épaisseur e, faible par rapport à la longueur de l'arbre (ce qui permet de considérer que la présence du disque n'affecte pas les rigidités de l'arbre).

Le point D est au centre de gravité du disque.

3.1. Etablir l'expression du moment d'inertie  $I_x$  du disque par rapport à l'axe Dx.

3.2. Etablir l'expression du moment d'inertie  $I_z$  du disque par rapport à l'axe Dz.

Oscillations en translation dans la direction x.

Soit  $x_D$  l'abscisse du centre de gravité D du disque, variable en fonction du temps t.

Sans effort extérieur appliqué au disque,  $x_D = L$ .

Le disque est amené à l'abscisse  $x_D = L + c_1$ , puis lâché sans vitesse initiale, à l'instant  $t = 0$ .

- 3.3. Appliquer le théorème de la résultante dynamique au disque, à un instant ultérieur  $t > 0$ , et en déduire l'équation différentielle à laquelle obéit alors son mouvement.
- 3.4. Résoudre cette équation différentielle, constater que la solution est un mouvement périodique et donner l'expression de la fréquence  $N_1$  de ce mouvement, en fonction de la rigidité  $K_1$  de l'arbre et de la masse M du disque.

Oscillations en translation dans la direction y.

A l'équilibre, le centre de gravité D du disque est situé verticalement à  $y_D = \delta$  ( $\delta$  est la flèche prise par l'arbre sous l'effet du poids P du disque).

Il est amené à  $y_D = \delta + c_2$ , puis lâché sans vitesse initiale, à l'instant  $t = 0$ .

- 3.5. Appliquer le théorème de la résultante dynamique au disque, à un instant ultérieur  $t > 0$ , et en déduire l'équation différentielle à laquelle obéit alors son mouvement.
- 3.6. Résoudre cette équation différentielle, constater que la solution est un mouvement périodique et donner l'expression de la fréquence  $N_2$  de ce mouvement, en fonction de la rigidité  $K_2$  de l'arbre et de la masse M du disque.

Oscillations en rotation suivant la direction x.

L'angle  $\theta_x$  définit l'orientation du disque autour de l'axe Dx.

Sans moment extérieur,  $\theta_x = 0$ .

Le disque est amené à la position angulaire  $\theta_x = c_3$ , puis lâché sans vitesse initiale, à l'instant  $t = 0$ .

- 3.7. Appliquer le théorème du moment dynamique au disque, à un instant ultérieur  $t > 0$ , et en déduire l'équation différentielle à laquelle obéit alors son mouvement.
- 3.8. Résoudre cette équation différentielle, constater que la solution est un mouvement périodique et donner l'expression de la fréquence  $N_3$  de ce mouvement, en fonction de la rigidité  $K_3$  de l'arbre et du moment d'inertie  $I_x$  du disque.

Oscillations en rotation suivant la direction z.

L'angle  $\theta_z$  définit l'orientation du disque autour de l'axe Dz.

Sans moment extérieur,  $\theta_z = 0$ .

Le disque est amené à la position angulaire  $\theta_z = c_4$ , puis lâché sans vitesse initiale, à l'instant  $t = 0$ .

- 3.9. Appliquer le théorème du moment dynamique au disque, à un instant ultérieur  $t > 0$ , et en déduire l'équation différentielle à laquelle obéit alors son mouvement.
- 3.10. Résoudre cette équation différentielle, constater que la solution est un mouvement périodique et donner l'expression de la fréquence  $N_4$  de ce mouvement, en fonction de la rigidité  $K_4$  de l'arbre et du moment d'inertie  $I_z$  du disque.

#### 4. Applications numériques.

Données :

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0,3$$

$$\rho = 7,85 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$$

$$r_A = 5 \text{ mm}$$

$$R = 37,5 \text{ mm}$$

$$L = 280 \text{ mm}$$

$$e = 26 \text{ mm}$$

4.1. Calculer numériquement  $N_1$ .

4.2. Calculer numériquement  $N_2$ .

4.3. Calculer numériquement  $N_3$ .

4.4. Calculer numériquement  $N_4$ .

#### Eléments de réponses

##### Question 1.1

Coté A : liaison rotule (ou sphérique) à doigt.

Coté B : liaison linéaire annulaire (ou sphère-cylindre).

##### Question 2.1

Définition du moment d'inertie polaire, en coordonnées polaires :

$$i_0 = \iint_{\text{Section}} r^2 dS$$

$$i_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_A} r^3 dr d\theta$$

$$i_0 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_A} r^3 dr$$

$$i_0 = \frac{\pi r_A^4}{2}$$

##### Question 2.2

Compte tenu de la symétrie de la section, le moment quadratique  $i_z$  est égal à la moitié du moment d'inertie polaire  $i_0$ .

$$i_0 = \iint_{\text{Section}} r^2 dS$$

$$i_0 = \iint_{\text{Section}} (y^2 + z^2) dS$$

$$i_0 = 2 \iint_{\text{Section}} y^2 dS$$

$$i_0 = 2 i_z$$

$$i_z = \frac{\pi r_A^4}{4}$$

##### Question 2.3

L'effort extérieur  $F_x$  génère un effort normal constant et une contrainte normale constante le long de la moitié AD de l'arbre, dont la longueur est L.

$$N(x) = F_x$$

Contrainte normale :  $n_1 = \frac{F_x}{s_A}$

Déformation, correspondant ici à une dilatation constante :  $e_1 = \frac{F_x}{E s_A}$

Or, comme  $U_x(0) = 0$ ,  $e_1 = \frac{U_x(L)}{L}$ .

$$K_1 = \frac{E s_A}{L}$$

Question 2.4

L'équilibre de la poutre et sa symétrie permettent de déterminer les réactions au niveau des

paliers, en A :  $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{F_y}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ , et en B :  $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{F_y}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D'où le moment fléchissant en fonction de  $x$ , pour  $0 < x < L$  :

$$M_z(x) = -\frac{F_y}{2} x$$

Question 2.5

Les déplacements verticaux des sections de la poutre sont déduits de l'équation différentielle  $\frac{d^2 U_y(x)}{dx^2} = \frac{M_z}{E i_z}$ , qui s'écrit aussi  $\frac{d\omega_z(x)}{dx} = \frac{M_z}{E i_z}$ , où  $\omega_z(x)$  est la pente de la déformée.

En tenant compte de l'expression de  $M_z$  pour  $0 < x < L$  :

$$\frac{d\omega_z(x)}{dx} = -\frac{F_y}{2 E i_z} x$$

1<sup>ère</sup> intégration :  $\omega_z(x) = -\frac{F_y}{2 E i_z} \frac{x^2}{2} + k_1$ , où  $k_1$  est une constante d'intégration.

2<sup>ème</sup> intégration :  $U_y(x) = -\frac{F_y}{2 E i_z} \frac{x^3}{6} + k_1 x + k_2$ , où  $k_2$  est une constante d'intégration.

Les constantes d'intégration sont déduites des conditions aux limites :

- $U_y(0) = 0$  (la liaison en A interdit les déplacements verticaux)
- $\omega_z(L) = 0$  (à cause de symétrie de la poutre et de son chargement)

$$U_y(x) = \frac{F_y}{12 E i_z} x (3L^2 - x^2)$$

$$K_2 = \frac{6 E i_z}{L^3}$$

Question 2.6

Le moment de torsion  $M_x$  est constant pour  $0 < x < L$ .

$$M_x(x) = C_x$$

Question 2.7

La rotation  $\omega_x(x)$  d'une section de l'arbre autour de l'axe Dx est liée au moment de torsion

par  $\frac{d\omega_x(x)}{dx} = \frac{M_x(x)}{G i_0}$ , où G est le module de cisaillement du matériau de l'arbre.

Rappel :  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$$\omega_x(x) = \frac{C_x x}{G i_0} + k, \text{ où } k \text{ est une constante d'intégration.}$$

La liaison en A ( $x = 0$ ) interdisant les rotations autour de l'axe Ax,  $k = 0$ .

$$K_3 = \frac{G i_0}{L}$$

Question 2.8

L'équilibre de la poutre et sa symétrie permettent de déterminer les réactions exercées sur

la poutre au niveau des paliers, en A :  $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{C_z}{2L} \\ 0 \end{pmatrix}$ , et en B :  $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{C_z}{2L} \\ 0 \end{pmatrix}$ .

D'où le moment fléchissant en fonction de x, pour  $0 < x < L$  :

$$M_z(x) = \frac{C_z}{2L} x$$

Question 2.9

Les déplacements verticaux des sections de la poutre sont déduits de l'équation

différentielle  $\frac{d^2 U_y(x)}{dx^2} = \frac{M_z}{E i_z}$ , qui s'écrit aussi  $\frac{d\omega_z(x)}{dx} = \frac{M_z}{E i_z}$ , où  $\omega_z(x)$  est la pente de la

déformée.

En tenant compte de l'expression de  $M_z$  pour  $0 < x < L$  :

$$\frac{d\omega_z(x)}{dx} = \frac{C_z}{2L E i_z} x$$

1<sup>ère</sup> intégration :  $\omega_z(x) = \frac{C_z}{2L E i_z} \frac{x^2}{2} + k_1$ , où  $k_1$  est une constante d'intégration.

2<sup>ème</sup> intégration :  $U_y(x) = \frac{C_z}{2L E i_z} \frac{x^3}{6} + k_1 x + k_2$ , où  $k_2$  est une constante d'intégration.

Les constantes d'intégration sont déduites des conditions aux limites :

- $U_y(0) = 0$  (la liaison en A interdit les déplacements verticaux)
- $U_y(L) = 0$  (à cause de symétrie de la poutre et de son chargement)

$$U_y(x) = \frac{C_z}{12 E i_z L} x (x^2 - L^2)$$

$$\omega_z(x) = \frac{C_z}{12 E i_z L} (3x^2 - L^2)$$

$$K_4 = \frac{6 E i_z}{L}$$

### Question 3.1

Définition du moment d'inertie  $I_x$  du disque par rapport à l'axe  $Dx$ , en coordonnées cylindriques :

$$I_x = \iiint_{\text{Disque}} \rho r^2 dV$$

$$I_x = \rho \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 dr d\theta dx$$

$$I_x = \rho \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} dx \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr$$

$$I_x = \frac{MR^2}{2}$$

### Question 3.2

Définition du moment d'inertie  $I_z$  du disque par rapport à l'axe  $Dz$  :

$$I_z = \iiint_{\text{Disque}} \rho (x^2 + y^2) dV$$

$$I_z = \iiint_{\text{Disque}} \rho x^2 dV + \iiint_{\text{Disque}} \rho y^2 dV$$

Ces 2 intégrales se calculent indépendamment :

$$\iiint_{\text{Disque}} \rho x^2 dV = \rho \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R x^2 r dr d\theta dx$$

$$\iiint_{\text{Disque}} \rho x^2 dV = \rho \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} x^2 dx \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr$$

$$\iiint_{\text{Disque}} \rho x^2 dV = \frac{M e^2}{12}$$

La symétrie du disque donne accès à la deuxième intégrale :  $\iiint_{\text{Disque}} \rho y^2 dV = \frac{I_x}{2}$

$$I_z = M \left( \frac{R^2}{4} + \frac{e^2}{12} \right)$$

### Question 3.3

Quand le centre de gravité du disque occupe une position  $x_D$  quelconque, la moitié AD de l'arbre est allongée de  $x_D - L$ , donc exerce sur le disque un effort de rappel égal à  $-K_1 (x_D - L)$ .

C'est le seul effort exercé sur le disque dans la direction horizontale, à un instant  $t > 0$ .

Le théorème de la résultante dynamique permet alors d'écrire l'équation différentielle qui régit le mouvement du disque.

$$-K_1 (x_D - L) = M x_D''$$

$$M x_D'' + K_1 x_D = K_1 L$$

### Question 3.4

La solution s'obtient classiquement, en tenant compte de la condition initiale.

$$x_D = L + c_1 \cos(\omega_1 t), \text{ avec } \omega_1 = \sqrt{\frac{K_1}{M}}$$

$$N_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_1}{M}}$$

### Question 3.5

Quand le centre de gravité du disque occupe une position  $y_D$  quelconque, l'arbre fléchi exerce sur lui un effort de rappel vertical égal à  $-K_2 y_D$ .

Cet effort s'ajoute algébriquement au poids du disque.

Le théorème de la résultante dynamique permet alors d'écrire l'équation différentielle qui régit le mouvement du disque.

$$-K_2 y_D + P = M y_D''$$

$$M y_D'' + K_2 y_D = P$$

### Question 3.6

La solution s'obtient classiquement, en tenant compte de la condition initiale et de la relation qui existe entre la flèche  $\delta$  de l'arbre et le poids  $P$  du disque à l'équilibre :  $P = K_2 \delta$ .

$$y_D = \delta + c_2 \cos(\omega_2 t), \text{ avec } \omega_2 = \sqrt{\frac{K_2}{M}}$$

$$N_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_2}{M}}$$

### Question 3.7

Quand le disque occupe une position angulaire  $\theta_x$  quelconque, l'arbre tordu exerce sur lui, suivant la direction  $x$ , un moment de rappel égal à  $-K_3 \theta_x$ .

Le théorème du moment dynamique permet alors d'écrire l'équation différentielle qui régit le mouvement du disque.

$$I_x \theta_x'' + K_3 \theta_x = 0$$



Question 3.8

La solution s'obtient classiquement, en tenant compte de la condition initiale.

$$\theta_x = c_3 \cos(\omega_3 t), \text{ avec } \omega_3 = \sqrt{\frac{K_3}{I_x}}$$

$$N_3 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_3}{I_x}}$$

Question 3.9

Quand le disque occupe une position angulaire  $\theta_z$  quelconque, l'arbre fléchi exerce sur lui, suivant la direction x, un moment de rappel égal à  $-K_4 \theta_z$ .

Le théorème du moment dynamique permet alors d'écrire l'équation différentielle qui régit le mouvement du disque.

$$I_z \theta_z'' + K_4 \theta_z = 0$$

Question 3.10

La solution s'obtient classiquement, en tenant compte de la condition initiale.

$$\theta_z = c_4 \cos(\omega_4 t), \text{ avec } \omega_4 = \sqrt{\frac{K_4}{I_z}}$$

$$N_4 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_4}{I_z}}$$

Question 4.1

$$N_1 = 1286 \text{ Hz}$$

Question 4.2

$$N_2 = 28 \text{ Hz}$$

Question 4.3

$$N_3 = 106 \text{ Hz}$$

Question 4.4

$$N_4 = 390 \text{ Hz}$$