CP46 – Automne 2009
Sujet de l'Examen FINAL
12/01/2010

Durée : 2 h - Documents autorisés

Conseils et consignes :

- Lire l'énoncé.
- Respecter les notations de l'énoncé.
- Identifier les questions.
- Encadrer les résultats.
- Numéroter les feuilles (1 feuille = 4 pages) en indiquant le nombre total de feuilles (Exemple : 1/3, 2/3, 3/3).
- Signer chaque feuille.

1. Objet du problème - Préliminaires.

2 étudiants de MC terminent actuellement une UV TW51 dont le sujet avait été proposé par General Electric.
Il s'agissait de modéliser le comportement d'une maquette de rotor dont ils disposent pour la formation de leurs clients.
Pour valider des études plus compliquées, réalisées avec le logiciel de calculs par éléments finis ANSYS, 4 cas simples ont été traités analytiquement.
Ces cas simples sont les différentes oscillations à un degré de liberté d'un disque fixé au centre d'un arbre (Fig. 1).
Le sujet proposé ici conduit au calcul des 4 fréquences propres correspondantes.

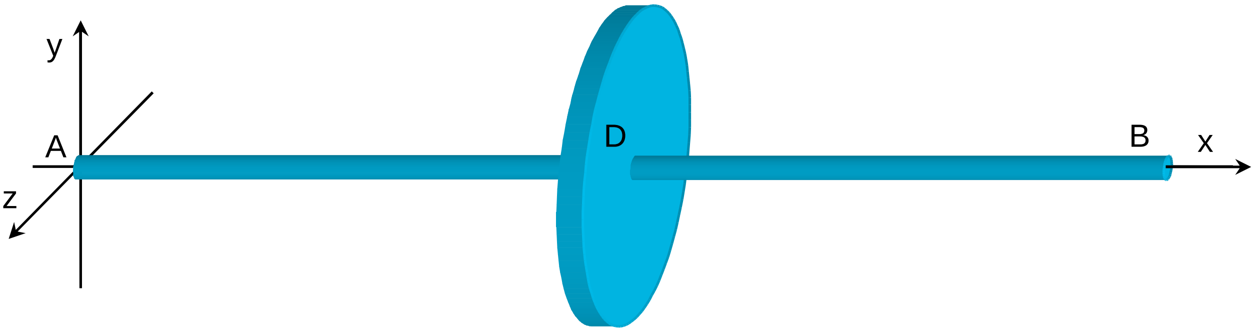

Fig. 1 : La maquette de rotor dans une configuration simple.

En ses extrémités A et B, l'arbre est supporté, horizontalement, par 2 paliers solidaires d'un bâti.
Pour cette étude, les seuls degrés de liberté du rotor par rapport au palier côté A sont les rotations autour de l'axe Az et autour de l'axe Ay.
Côté B, les trois rotations sont possibles, ainsi qu'une translation dans la direction x.

1.1. Quelles sont les 2 liaisons normalisées simples qui permettent ces ensembles de degrés de liberté (l'une côté A, l'autre côté B) ?

Ces liaisons seront considérées comme parfaites.

L'arbre et le disque sont en acier, de module d'Young E, de coefficient de Poisson ν et de masse volumique ρ.
Cependant, pour une première approximation, la masse de l'arbre ne sera jamais prise en compte dans la suite du problème.
D'autre part, le disque sera considéré comme un solide indéformable.

2. Rigidités de l'arbre (sans le disque).

L'arbre est un cylindre élancé, de rayon r_A, de section s_A et de longueur 2L, à considérer comme une poutre.

2.1. Démontrer la formule qui donne le moment d'inertie polaire i_0 d'une section circulaire pleine de cette poutre en fonction de son rayon r_A.

2.2. En déduire l'expression du moment quadratique i_z de la même section par rapport à la direction z.

Rigidité en traction.

Un effort extérieur F_x est appliqué au point D, milieu de la poutre, suivant la direction x.

2.3. Calculer le déplacement longitudinal $U_x(L)$ du point D et en déduire la rigidité $K_1 = \dfrac{F_x}{U_x(L)}$.

Première rigidité en flexion.

Un effort extérieur F_y est appliqué au point D suivant la direction y.

2.4. Donner l'expression du moment fléchissant $M_z(x)$ le long de la moitié AD de l'arbre, pour $0 < x < L$.

2.5. En tenant compte des conditions aux limites en A et D imposées par les données de ce cas de figure et par sa symétrie, déterminer le déplacement latéral $U_y(L)$ du point D et en déduire la rigidité $K_2 = \dfrac{F_y}{U_y(L)}$.

Rigidité en torsion.

Un moment extérieur C_x est appliqué au point D suivant la direction Dx.

2.6. Donner l'expression du moment de torsion $M_x(x)$ le long de la moitié AD de l'arbre, pour $0 < x < L$.

2.7. Calculer la rotation $\omega_x(L)$ de la section centrale de l'arbre autour de l'axe Dx et en déduire la rigidité $K_3 = \dfrac{C_x}{\omega_x(L)}$ (qui dépendra du module de cisaillement G).

Deuxième rigidité en flexion.

Un moment extérieur C_z est appliqué au point D suivant la direction Dz.

2.8. Donner l'expression du moment fléchissant $M_z(x)$ le long de la moitié AD de l'arbre, pour $0 < x < L$.

2.9. En tenant compte des conditions aux limites en A et D imposées par les données de ce cas de figure et par sa symétrie, déterminer la rotation $\omega_z(L)$ de la section centrale de l'arbre autour de l'axe Dz et en déduire la rigidité $K_4 = \dfrac{C_z}{\omega_z(L)}$.

3. Mouvements oscillatoires du disque monté sur l'arbre.

Le disque est un cylindre plat, de masse M, de rayon R et d'épaisseur e, faible par rapport à la longueur de l'arbre (ce qui permet de considérer que la présence du disque n'affecte pas les rigidités de l'arbre).
Le point D est au centre de gravité du disque.

3.1. Etablir l'expression du moment d'inertie I_x du disque par rapport à l'axe Dx.

3.2. Etablir l'expression du moment d'inertie I_z du disque par rapport à l'axe Dz.

Oscillations en translation dans la direction x.

Soit x_D l'abscisse du centre de gravité D du disque, variable en fonction du temps t.
Sans effort extérieur appliqué au disque, $x_D = L$.
Le disque est amené à l'abscisse $x_D = L + c_1$, puis lâché sans vitesse initiale, à l'instant $t = 0$.

3.3. Appliquer le théorème de la résultante dynamique au disque, à un instant ultérieur $t > 0$, et en déduire l'équation différentielle à laquelle obéit alors son mouvement.

3.4. Résoudre cette équation différentielle, constater que la solution est un mouvement périodique et donner l'expression de la fréquence N_1 de ce mouvement, en fonction de la rigidité K_1 de l'arbre et de la masse M du disque.

Oscillations en translation dans la direction y.

A l'équilibre, le centre de gravité D du disque est situé verticalement à $y_D = \delta$ (δ est la flèche prise par l'arbre sous l'effet du poids P du disque).
Il est amené à $y_D = \delta + c_2$, puis lâché sans vitesse initiale, à l'instant $t = 0$.

3.5. Appliquer le théorème de la résultante dynamique au disque, à un instant ultérieur $t > 0$, et en déduire l'équation différentielle à laquelle obéit alors son mouvement.

3.6. Résoudre cette équation différentielle, constater que la solution est un mouvement périodique et donner l'expression de la fréquence N_2 de ce mouvement, en fonction de la rigidité K_2 de l'arbre et de la masse M du disque.

Oscillations en rotation suivant la direction x.

L'angle θ_x définit l'orientation du disque autour de l'axe Dx.
Sans moment extérieur, $\theta_x = 0$.
Le disque est amené à la position angulaire $\theta_x = c_3$, puis lâché sans vitesse initiale, à l'instant $t = 0$.

3.7. Appliquer le théorème du moment dynamique au disque, à un instant ultérieur $t > 0$, et en déduire l'équation différentielle à laquelle obéit alors son mouvement.

3.8. Résoudre cette équation différentielle, constater que la solution est un mouvement périodique et donner l'expression de la fréquence N_3 de ce mouvement, en fonction de la rigidité K_3 de l'arbre et du moment d'inertie I_x du disque.

Oscillations en rotation suivant la direction z.

L'angle θ_z définit l'orientation du disque autour de l'axe Dz.
Sans moment extérieur, $\theta_z = 0$.
Le disque est amené à la position angulaire $\theta_z = c_4$, puis lâché sans vitesse initiale, à l'instant t = 0.

3.9. Appliquer le théorème du moment dynamique au disque, à un instant ultérieur t > 0, et en déduire l'équation différentielle à laquelle obéit alors son mouvement.

3.10. Résoudre cette équation différentielle, constater que la solution est un mouvement périodique et donner l'expression de la fréquence N_4 de ce mouvement, en fonction de la rigidité K_4 de l'arbre et du moment d'inertie I_z du disque.

4. Applications numériques.

Données :

E= 210 GPa	ν = 0,3	$\rho = 7{,}85.10^{-6}$ kg/mm^3
r_A = 5 mm	R = 37,5 mm	
L = 280 mm	e = 26 mm	

4.1. Calculer numériquement N_1.

4.2. Calculer numériquement N_2.

4.3. Calculer numériquement N_3.

4.4. Calculer numériquement N_4.