CP46 – Automne 2010
Corrigé de l'Examen FINAL
19/01/2011

2 exercices indépendants - Durée : 2 h - Documents autorisés

1. Jojo le singe fait vibrer la poutre.

Depuis l'examen médian, des modifications ont été apportées à la poutre BA, dont la longueur est toujours 2L et qui fait toujours un angle α avec le sol horizontal (Fig. 1).

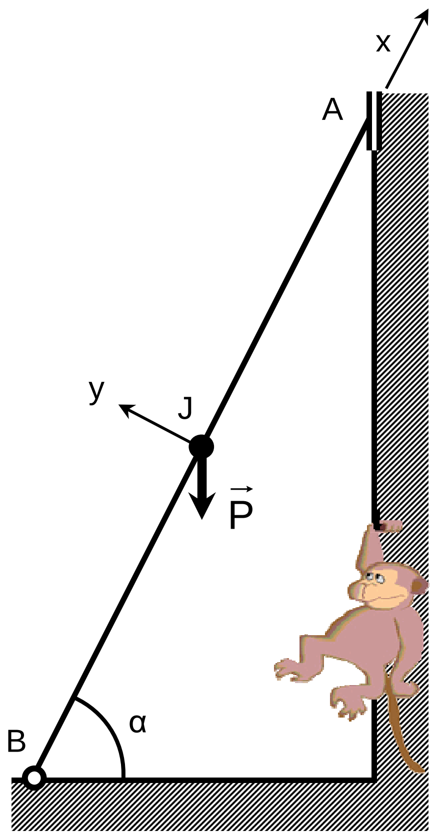

Fig. 1 : Jojo observe la poutre et le boulet.

La liaison entre la poutre et le sol, au point B, est maintenant une rotule parfaite.
Sa liaison avec le mur, au point A, est une glissière parfaite d'axe vertical.
Jojo n'est plus suspendu au point J, centre de la poutre, en x = 0, où il a été remplacé par un boulet considéré comme ponctuel, dont le poids $\vec{P}$ s'applique verticalement en ce point.
Le poids de la poutre est négligeable par rapport à celui de ce boulet.

1.1. Ecrire les équations d'équilibre de la poutre en faisant intervenir les réactions du mur au point A et du sol au point B.
En déduire la valeur de ces réactions exercées par le sol et le mur sur la poutre.

1.2. Donner l'expression du moment fléchissant $M_z(x)$ le long de la poutre, entre x = -L et x = L et tracer un graphique schématique de son évolution en fonction de x.

1.3. A partir de l'expression de $M_z(x)$ entre x = 0 et x = L, en ne tenant compte que de la flexion, calculer la flèche prise par la poutre (c'est-à-dire le déplacement $V_y(0)$ de son centre J dans la direction y).
Donner son expression en fonction de P, L, α, E (module d'Young du matériau) et I_z (moment quadratique de la section de la poutre).

1.4. En déduire la rigidité K de cette poutre fléchie par une force $\vec{F}$ appliquée en J dans la direction y.

Rappel : $K = \dfrac{F}{y_J}$, où y_J est le déplacement transversal du point J.

($y_J = V_y(0)$ de la question précédente.)

Pour initier un mouvement vibratoire, Jojo soulage d'abord la poutre du poids du boulet, pour qu'elle redevienne rectiligne ($y_J = 0$).
A l'instant t = 0, il lâche le boulet sans vitesse initiale.

1.5. Appliquer le théorème de la résultante dynamique au boulet (qui possède une masse M), à un instant ultérieur t > 0, et en déduire l'équation différentielle à laquelle obéit alors son mouvement.

1.6. Résoudre cette équation différentielle et donner l'expression du déplacement $y_J(t)$ du boulet en fonction du temps.

1.7. Constater que la solution est un mouvement périodique et donner l'expression de la période T de ce mouvement, en fonction des caractéristiques de la poutre et de la masse M du boulet.

1.8. Calculer numériquement cette période T avec les données suivantes :
$M = 60$ kg $L = 2$ m $E = 10$ GPa $I_z = 50$ cm^4

2. Cylindre contre cube.

Un cylindre et un cube de même masse M sont placés sur un plan incliné faisant un angle α avec le plan horizontal et muni d'un axe x (Fig. 2).
A l'instant t = 0, le cylindre et le cube sont abandonnés sans vitesse initiale, leurs centres de gravités étant positionnés en x = 0.
Sous l'effet de leur poids, dû à la gravité locale $\vec{g}$, ils se mettent spontanément en mouvement.

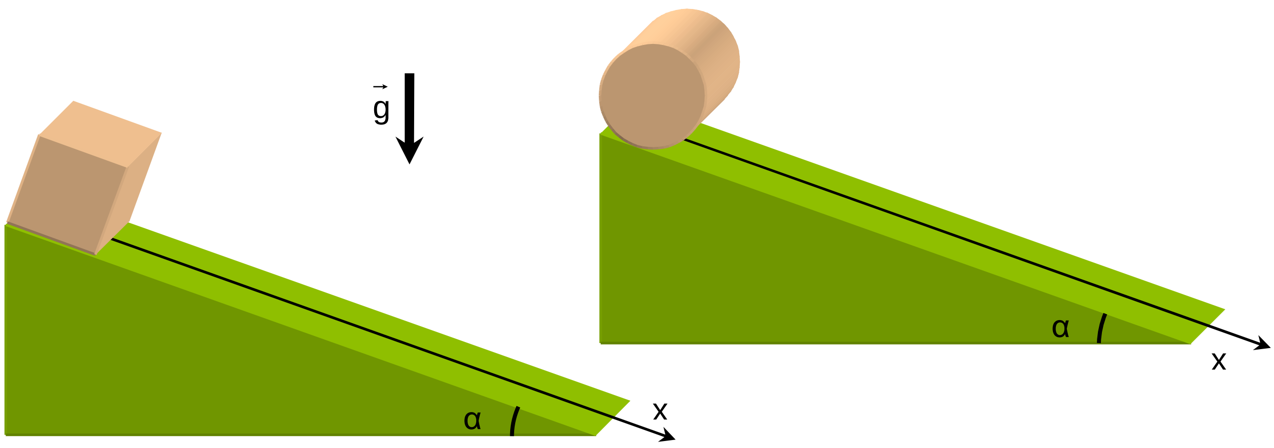

Fig. 2 : Le cube et le cylindre à l'arrêt en x = 0.

La liaison entre le cube et le plan incliné est une glissière parfaite, d'axe x.

2.1. Effectuer un bilan des efforts qui s'exercent sur le cube et en déduire l'accélération x_{CU}'' de son centre de gravité.

2.2. Donner l'équation du mouvement d'ensemble du cube, c'est-à-dire l'expression de la position x_{CU} de son centre de gravité en fonction du temps.

2.3. Au bout de quel temps T_{CU} le cube arrive-t-il au bas du plan incliné, en x = L ?

2.4. Quelle est alors sa vitesse V_{CU}^{L} ?

2.5. Quelle est alors son énergie cinétique E_{CU}^{L} ?
Exprimer cette énergie cinétique en fonction de la masse M du cube, de la gravité g, de la longueur L et de l'angle α uniquement.

Le cylindre est lié au plan incliné par une condition de roulement sans glissement.

2.6. A partir de la définition d'un moment d'inertie, démontrer la formule qui donne le moment d'inertie I_{AR} d'un cylindre par rapport à son axe de révolution, en fonction de sa masse M et de son rayon R.

2.7. Etablir l'expression du moment d'inertie I_{GN} d'un cylindre par rapport à l'une quelconque de ses génératrices (Fig. 3).

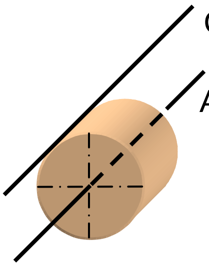

Fig. 3 : Axe de révolution et génératrice d'un cylindre.

2.8. Effectuer un bilan des efforts et moments qui s'exercent sur le cylindre et en déduire l'accélération x_{CY}'' de son centre de gravité.

2.9. Donner l'équation du mouvement d'ensemble du cylindre, c'est-à-dire l'expression de la position x_{CY} de son centre de gravité en fonction du temps.

2.10. Au bout de quel temps T_{CY} le cylindre arrive-t-il au bas du plan incliné, en x = L ?

2.11. Quelle est alors la vitesse V_{CY}^{L} de son centre de gravité ?

2.12. Quelle est alors son énergie cinétique E_{CY}^{L} ?
Exprimer cette énergie cinétique en fonction de la masse M du cylindre, de la gravité g, de la longueur L et de l'angle α uniquement.

2.13. Commenter.
Lequel des 2 solides arrive le premier au bas du plan incliné ?
Lequel possède alors la plus grande énergie cinétique ?
Pourquoi ?

Eléments de réponses

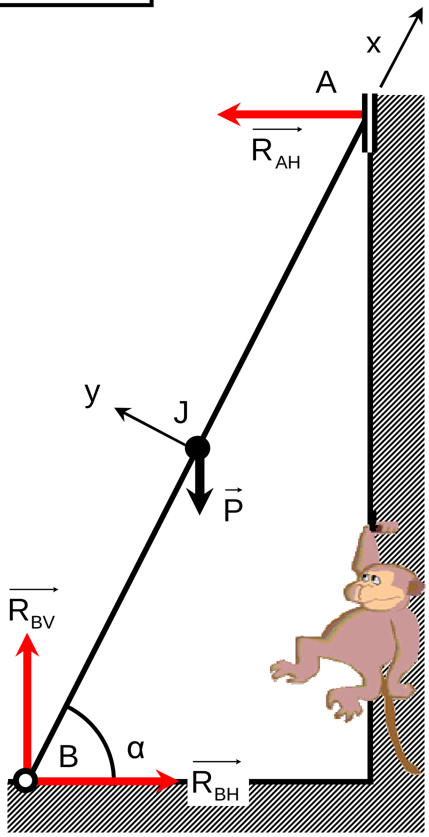

Fig. 4 : La poutre et les efforts appliqués.

Question 1.1

Conformément à la Fig. 4 :

- $\overrightarrow{R_{BH}}$ et $\overrightarrow{R_{BV}}$ sont les efforts transmis par la rotule, dans les directions horizontale et verticale,
- $\overrightarrow{R_{AH}}$ est l'effort transmis par la glissière, dans la direction horizontale.

Equilibre des efforts dans la direction horizontale :

$$\boxed{R_{BH} - R_{AH} = 0}$$

Equilibre des efforts dans la direction verticale :

$$\boxed{R_{BV} - P = 0}$$

Equilibre des moments par rapport au point B, (composante suivant z) :

$$\boxed{2\,L\,R_{AH}\,\sin(\alpha) - L\,P\,\cos(\alpha) = 0}$$

D'où les valeurs des 3 efforts transmis par les liaisons à la poutre :

$$\boxed{\begin{array}{l} R_{AH} = R_{BH} = \dfrac{P}{2\tan(\alpha)} \\ R_{BV} = P \end{array}}$$

Question 1.2

Pour -L < x < 0 :

$$M_z(x) = R_{AH}\,\sin(\alpha)\,(\,L - x\,) - P\cos(\alpha)\,(\,0 - x\,)$$

$$\boxed{M_z(x) = \frac{P}{2}\cos(\alpha)\,(\,L + x\,)}$$

Pour 0 < x < L :

$$M_z(x) = R_{AH}\,\sin(\alpha)\,(\,L - x\,)$$

$$\boxed{M_z(x) = \frac{P}{2}\cos(\alpha)\,(\,L - x\,)}$$

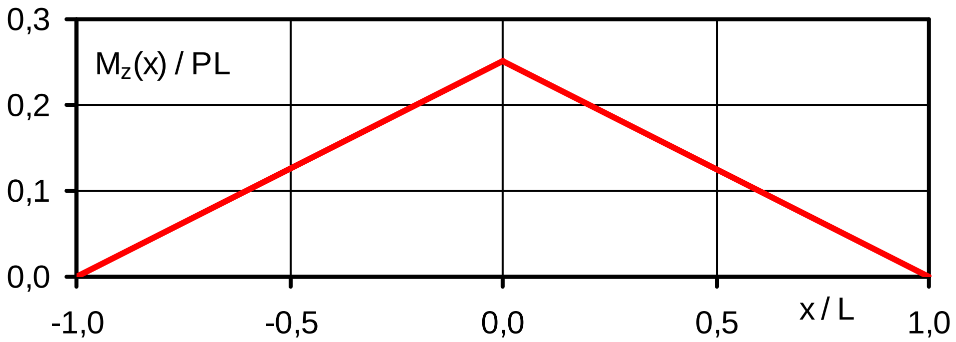

Fig. 5 : Evolution du moment fléchissant le long de la poutre (tracé pour α = 60°).

Question 1.3

Le déplacement latéral $V_y(x)$ des sections de la poutre est lié au moment fléchissant $M_z(x)$ par l'équation différentielle : $\dfrac{d^2V_y(x)}{dx^2} = \dfrac{M_z(x)}{E\,I_z}$

En tenant compte de l'expression de l'expression de $M_z(x)$ entre x = 0 et x = L :

$$\frac{d^2V_y(x)}{dx^2} = \frac{P\cos(\alpha)}{2\,E\,I_z}(\,L - x\,)$$

$1^{ère}$ intégration : $\dfrac{dV_y(x)}{dx} = \dfrac{P\cos(\alpha)}{2\,E\,I_z}\left(\,Lx - \dfrac{x^2}{2}\,\right) + C_1$

C_1 est une constante d'intégration qui peut être déterminée grâce à la symétrie du moment fléchissant, qui implique que la pente de la déformée est nulle en x = 0.

$C_1 = 0$

$2^{ème}$ intégration : $V_y(x) = \dfrac{P\cos(\alpha)}{2\,E\,I_z}\left(\,L\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6}\,\right) + C_2$

C_2 est une constante d'intégration qui peut être déterminée grâce à la condition de déplacement transversal nul au niveau du point A.

$V_y(L) = 0$ implique $C_2 = -\dfrac{P\,L^3\cos(\alpha)}{6\,E\,I_z}$

C_2 est également la valeur du déplacement $V_y(0)$ en x = 0

$$\boxed{V_y(0) = -\frac{P\,L^3\cos(\alpha)}{6\,E\,I_z}}$$

Question 1.4

L'effort transversal appliqué précédemment dans la direction y est - P cos α.

En posant F = - P cos α,

$$y_J(0) = \frac{F\,L^3}{6\,E\,I_z}$$

$$\boxed{K = \frac{6\,E\,I_z}{L^3}}$$

Question 1.5

Le boulet est soumis à son poids et à la force de rappel exercée par la poutre.

En projection dans la direction y :

$$-P\cos(\alpha) - K\,y_J = M\,y_J''$$

$$\boxed{M\,y_J'' + K\,y_J = -P\cos(\alpha)}$$

Question 1.6

La solution s'obtient classiquement, en tenant compte des conditions initiales et en posant $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$.

$$\boxed{y_J(t) = \frac{P\cos(\alpha)}{K}\left[\cos(\omega\, t) - 1\right]}$$

Question 1.7

La période T est déduite de la pulsation ω.

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega}$$

$$\boxed{T = 2\,\pi\sqrt{\frac{M\,L^3}{6\,E\,I_z}}}$$

Question 1.8

$$\boxed{T = 2{,}51\,s}$$

Question 2.1

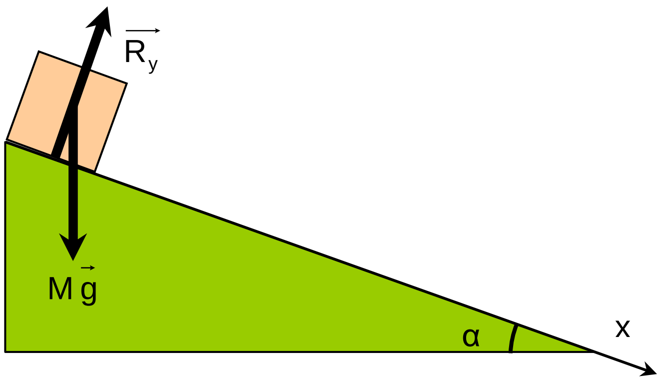

Fig. 6 : Les efforts qui s'exercent sur le cube.

Les efforts agissant sur le cube sont son poids et une réaction du plan incliné, dans la direction y seulement, par l'intermédiaire de la liaison glissière.

Le théorème de la résultante dynamique donne accès à l'accélération x''_{CU}, après projection de l'équation vectorielle dans les directions x et y :

- Suivant y : $R_y - M\,g\cos(\alpha) = 0$
- Suivant x : $M\,g\sin(\alpha) = M\,x''_{CU}$

La 2ème de ces équations fournit directement l'accélération suivant x.

$$\boxed{x''_{CU} = g\sin(\alpha)}$$

Question 2.2

L'équation du mouvement du cube est donnée par 2 intégrations successives.
Les constantes d'intégration sont nulles car, à t = 0, $x_{CU} = 0$ et $x'_{CU} = 0$.

$$\boxed{x_{CU} = \frac{1}{2} g \sin(\alpha)\, t^2}$$

Question 2.3

D'après le résultat de la question précédente :

$$L = \frac{1}{2} g \sin(\alpha)\, T_{CU}^2$$

$$\boxed{T_{CU} = \sqrt{\frac{2\,L}{g \sin(\alpha)}}}$$

Question 2.4

Expression de la vitesse du cube :

$$x'_{CU} = g \sin(\alpha)\, t$$

V_{CU}^{L} est la vitesse du cube quand t = T_{CU}.

$$\boxed{V_{CU}^{L} = \sqrt{2\,L\,g \sin(\alpha)}}$$

Question 2.5

Expression de l'énergie cinétique du cube, valable pour un solide en translation seulement :

$$E_{CU}^{L} = \frac{1}{2} M\, V_{CU}^{L\,2}$$

$$\boxed{E_{CU}^{L} = M\,L\,g \sin(\alpha)}$$

Question 2.6

Définition du moment d'inertie I_{AR} du cylindre par rapport à son axe de révolution, en coordonnées cylindriques :

$$I_{AR} = \iiint_{Cylindre} \rho\, r^2\, dV$$

$$I_{AR} = \rho \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{R} r^3 dr\, d\theta\, dz$$, où L est la longueur du cylindre et ρ sa masse volumique.

$$I_{AR} = \rho \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R} r^3 dr$$

$$I_{AR} = 2\,\pi\,\rho\,L\,\frac{R^4}{4}$$

$$\boxed{I_{AR} = \frac{1}{2} M\,R^2}$$

CP46 – Automne 2010
Corrigé de l'Examen FINAL
19/01/2011

Question 2.7

D'après le théorème de Huygens :

$$I_{GN} = I_{AR} + M R^2$$

$$\boxed{I_{GN} = \frac{3}{2} M R^2}$$

Question 2.8

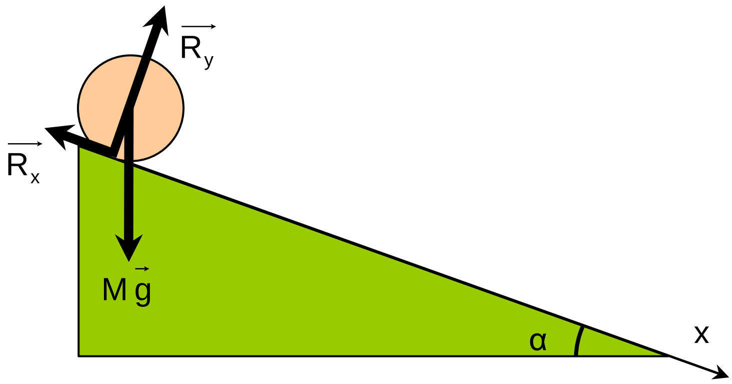

Fig. 7 : Les efforts qui s'exercent sur le cylindre.

Les efforts agissant sur le cube sont son poids et une réaction du plan incliné a priori quelconque, et qui possède donc 2 composantes dans les directions x et y, conformément à la Fig. 7.
Le théorème de la résultante dynamique permet d'écrire, après projection de l'équation vectorielle dans les directions x et y :

- Suivant y : $R_y - M\,g\cos(\alpha) = 0$
- Suivant x : $-R_x + M\,g\sin(\alpha) = M\,x''_{CY}$

Le théorème du moment dynamique fournit une équation liant les moments des efforts par rapport au centre de gravité du cylindre (composante suivant z) à son accélération angulaire θ''.

- $-R_x\,R = I_{AR}\,\theta''$

D'autre part, la condition de roulement sans glissement se traduit par :

- $\theta'' = -\dfrac{x''_{CY}}{R}$

Ce système d'équations donne accès à x''_{CY}, soit, après avoir remplacé I_{AR} par sa valeur calculée précédemment :

$$\boxed{x''_{CY} = \frac{2}{3}\,g\sin(\alpha)}$$

Remarque : le même résultat peut être trouvé plus rapidement en écrivant le théorème du moment dynamique au point de contact du cylindre sur le plan incliné, qui est immobile.

$$-M\,g\,R\sin(\alpha) = I_{GN}\,\theta''$$

CP46 – Automne 2010
Corrigé de l'Examen FINAL
19/01/2011

Question 2.9

L'équation du mouvement du centre de gravité du cylindre est donnée par 2 intégrations successives.
Les constantes d'intégration sont nulles car, à t = 0, $x_{CY} = 0$ et $x'_{CY} = 0$.

$$\boxed{x_{CY} = \frac{1}{3}\, g \sin(\alpha)\, t^2}$$

Question 2.10

D'après le résultat de la question précédente :

$$L = \frac{1}{3}\, g \sin(\alpha)\, T_{CY}^2$$

$$\boxed{T_{CY} = \sqrt{\frac{3\,L}{g \sin(\alpha)}}}$$

Question 2.11

Expression de la vitesse du centre de gravité du cylindre :

$$x'_{CY} = \frac{2}{3}\, g \sin(\alpha)\, t$$

V_{CY}^L est la vitesse du cube quand t = T_{CU}.

$$\boxed{V_{CY}^L = \sqrt{\frac{4}{3}\, L\, g \sin(\alpha)}}$$

Question 2.12

Pour un solide animé d'une translation et d'une rotation, l'énergie cinétique est la somme de 2 termes :

$$E_{CY}^L = \frac{1}{2}\, M\, V_{CY}^{L\,2} + \frac{1}{2}\, I_{AR}\, \theta'^2 \text{, où } \theta' \text{ est la vitesse de rotation : } \theta' = -\frac{V_{CY}^L}{R}$$

$$\boxed{E_{CY}^L = M\, L\, g \sin(\alpha)}$$

Question 2.13

$$\boxed{T_{CU} < T_{CY}}$$

Le cube parcourt la distance L plus rapidement que le cylindre.

$$\boxed{E_{CU}^L = E_{CY}^L}$$

A l'arrivée, les 2 solides ont la même énergie cinétique, égale au travail fourni par leur poids quand l'altitude diminue de $L \sin(\alpha)$.