CP46 – Automne 2010
Sujet de l'Examen FINAL
19/01/2011

2 exercices indépendants - Durée : 2 h - Documents autorisés

Conseils et consignes :

- Lire l'énoncé.
- Respecter les notations de l'énoncé.
- Identifier les questions.
- Encadrer les résultats.
- Numéroter les feuilles (1 feuille = 4 pages) en indiquant le nombre total de feuilles (Exemple : 1/3, 2/3, 3/3).

1. Jojo le singe fait vibrer la poutre.

Depuis l'examen médian, des modifications ont été apportées à la poutre BA, dont la longueur est toujours 2L et qui fait toujours un angle α avec le sol horizontal (Fig. 1).

La liaison entre la poutre et le sol, au point B, est maintenant une rotule parfaite.
Sa liaison avec le mur, au point A, est une glissière parfaite d'axe vertical.
Jojo n'est plus suspendu au point J, centre de la poutre, en x = 0, où il a été remplacé par un boulet considéré comme ponctuel, dont le poids $\vec{P}$ s'applique verticalement en ce point.
Le poids de la poutre est négligeable par rapport à celui de ce boulet.

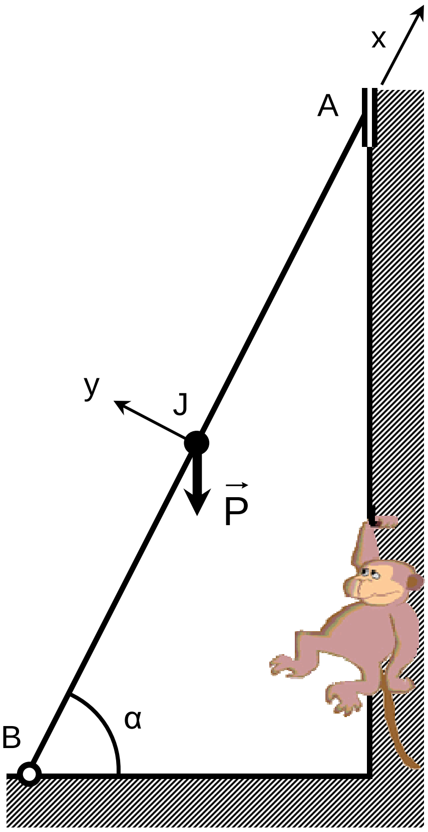

Fig. 1 : Jojo observe la poutre et le boulet.

1.1. Ecrire les équations d'équilibre de la poutre en faisant intervenir les réactions du mur au point A et du sol au point B.
En déduire la valeur de ces réactions exercées par le sol et le mur sur la poutre.

1.2. Donner l'expression du moment fléchissant $M_z(x)$ le long de la poutre, entre x = -L et x = L et tracer un graphique schématique de son évolution en fonction de x.

1.3. A partir de l'expression de $M_z(x)$ entre x = 0 et x = L, en ne tenant compte que de la flexion, calculer la flèche prise par la poutre (c'est-à-dire le déplacement $V_y(0)$ de son centre J dans la direction y).
Donner son expression en fonction de P, L, α, E (module d'Young du matériau) et I_z (moment quadratique de la section de la poutre).

CP46 – Automne 2010
Sujet de l'Examen FINAL
19/01/2011

1.4. En déduire la rigidité K de cette poutre fléchie par une force $\vec{F}$ appliquée en J dans la direction y.

Rappel : $K = \dfrac{F}{y_J}$, où y_J est le déplacement transversal du point J.

($y_J = V_y(0)$ de la question précédente.)

Pour initier un mouvement vibratoire, Jojo soulage d'abord la poutre du poids du boulet, pour qu'elle redevienne rectiligne ($y_J = 0$).
A l'instant t = 0, il lâche le boulet sans vitesse initiale.

1.5. Appliquer le théorème de la résultante dynamique au boulet (qui possède une masse M), à un instant ultérieur t > 0, et en déduire l'équation différentielle à laquelle obéit alors son mouvement.

1.6. Résoudre cette équation différentielle et donner l'expression du déplacement $y_J(t)$ du boulet en fonction du temps.

1.7. Constater que la solution est un mouvement périodique et donner l'expression de la période T de ce mouvement, en fonction des caractéristiques de la poutre et de la masse M du boulet.

1.8. Calculer numériquement cette fréquence N avec les données suivantes :
$M = 60$ kg $L = 2$ m $E = 10$ GPa $I_z = 50$ cm^4

2. Cylindre contre cube.

Un cylindre et un cube de même masse M sont placés sur un plan incliné faisant un angle α avec le plan horizontal et muni d'un axe x (Fig. 2).
A l'instant t = 0, le cylindre et le cube sont abandonnés sans vitesse initiale, leurs centres de gravités étant positionnés en x = 0.

Sous l'effet de leur poids, dû à la gravité locale $\vec{g}$, ils se mettent spontanément en mouvement.

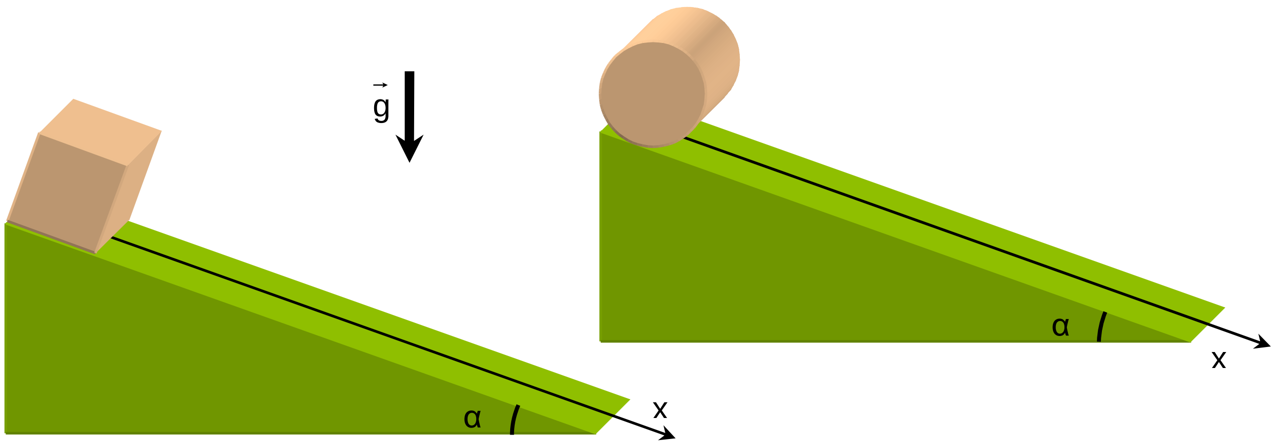

Fig. 2 : Le cube et le cylindre à l'arrêt en x = 0.

CP46 – Automne 2010
Sujet de l'Examen FINAL
19/01/2011

La liaison entre le cube et le plan incliné est une glissière parfaite, d'axe x.

2.1. Effectuer un bilan des efforts qui s'exercent sur le cube et en déduire l'accélération x_{CU}'' de son centre de gravité.

2.2. Donner l'équation du mouvement d'ensemble du cube, c'est-à-dire l'expression de la position x_{CU} de son centre de gravité en fonction du temps.

2.3. Au bout de quel temps T_{CU} le cube arrive-t-il au bas du plan incliné, en $x = L$?

2.4. Quelle est alors sa vitesse V_{CU}^{L} ?

2.5. Quelle est alors son énergie cinétique E_{CU}^{L} ?
Exprimer cette énergie cinétique en fonction de la masse M du cube, de la gravité g, de la longueur L et de l'angle α uniquement.

Le cylindre est lié au plan incliné par une condition de roulement sans glissement.

2.6. A partir de la définition d'un moment d'inertie, démontrer la formule qui donne le moment d'inertie I_{AR} d'un cylindre par rapport à son axe de révolution, en fonction de sa masse M et de son rayon R.

2.7. Etablir l'expression du moment d'inertie I_{GN} d'un cylindre par rapport à l'une quelconque de ses génératrices (Fig. 3).

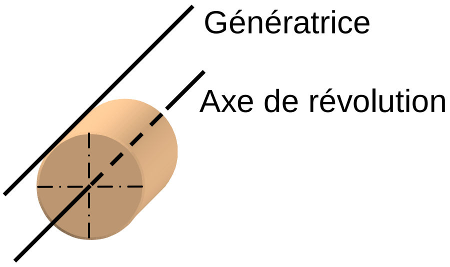

Fig. 3 : Axe de révolution et génératrice d'un cylindre.

2.8. Effectuer un bilan des efforts et moments qui s'exercent sur le cylindre et en déduire l'accélération x_{CY}'' de son centre de gravité.

2.9. Donner l'équation du mouvement d'ensemble du cylindre, c'est-à-dire l'expression de la position x_{CY} de son centre de gravité en fonction du temps.

2.10. Au bout de quel temps T_{CY} le cylindre arrive-t-il au bas du plan incliné, en $x = L$?

2.11. Quelle est alors la vitesse V_{CY}^{L} de son centre de gravité ?

2.12. Quelle est alors son énergie cinétique E_{CY}^{L} ?
Exprimer cette énergie cinétique en fonction de la masse M du cylindre, de la gravité g, de la longueur L et de l'angle α uniquement.

2.13. Commenter.
Lequel des 2 solides arrive le premier au bas du plan incliné ?
Lequel possède alors la plus grande énergie cinétique ?
Pourquoi ?