**CP46 – Automne 2011**
**Corrigé de l'examen FINAL**
**19/01/2012**

2 exercices indépendants - Durée : 2 h - Documents autorisés

**Conseils et consignes :**

- Lire l'énoncé.
- Respecter les notations de l'énoncé.
- Identifier les questions.
- Encadrer les résultats.
- Numéroter les feuilles (1 feuille = 4 pages) en indiquant le nombre total de feuilles (Exemple : 1/3, 2/3, 3/3).

## 1. Potentiel exotique

Le professeur Tournesol a mis au point une chambre expérimentale où il est possible de générer un champ d'énergie potentielle $E_p$ de la forme :

$$E_p = A\,x^2 + B\,y^2 - C\,z$$

x, y et z sont les coordonnées d'un point dans un repère d'origine O fixe par rapport à la chambre.
A, B et C sont des paramètres ajustables, positifs.
Aucune autre énergie potentielle n'agit dans la chambre.

1.1. Dans le système international, quelles sont les unités des paramètres A, B et C (les réponses ne feront apparaître que les unités de base, qui sont le m, le kg et la s).

1.2. Quel est le champ de forces $\vec{F}$ qui dérive de l'énergie potentielle $E_p$ ?

1.3. Une bille, qui peut être considérée comme ponctuelle, est positionnée en un point quelconque de la chambre et libérée dans le champ de forces à l'instant t = 0.
Quel est son vecteur accélération $\vec{\Gamma}$ à un instant ultérieur quelconque, en fonction de sa masse M, des paramètres A, B et C, ainsi que de ses coordonnées ?

1.4. En déduire les 3 équations différentielles qui permettront de déterminer la trajectoire de la bille.

A l'instant t = 0, la bille est libérée au point $\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ avec la vitesse $\begin{pmatrix} 0 \\ V_{0Y} \\ V_{0Z} \end{pmatrix}$.

Les questions suivantes permettront de déterminer la trajectoire qu'elle suivra pour tout instant ultérieur t > 0.

1.5. Résoudre l'équation différentielle qui fait intervenir x et exprimer x(t).

1.6. Résoudre l'équation différentielle qui fait intervenir y et exprimer y(t).

1.7. Résoudre l'équation différentielle qui fait intervenir z et exprimer z(t).

1.8. Cas particulier 1 : B = A, C = 0, $V_{0Y} = x_0\sqrt{\dfrac{2B}{M}}$, $V_{0Z} = 0$.

Quelle est la trajectoire décrite par la bille ?
Illustrer la réponse par un croquis.

1.9. Cas particulier 2 : B = A, C ≠ 0, $V_{0Y} = x_0 \sqrt{\frac{2B}{M}}$, $V_{0Z} = 0$.

Quelle est la trajectoire décrite par la bille ?
Illustrer la réponse par un croquis.

## 2. Course de yoyos tractés par des rats

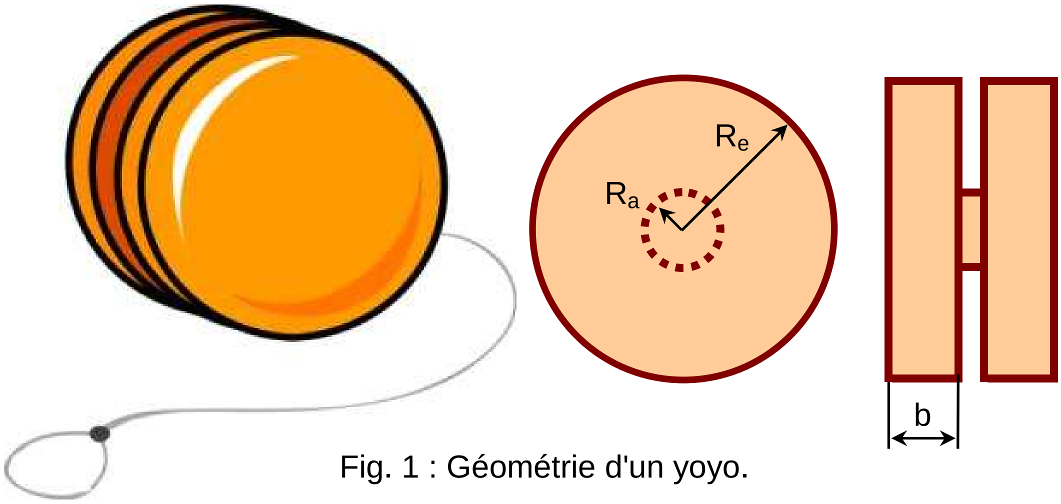


Fig. 1 : Géométrie d'un yoyo.

Un yoyo est constitué de 2 disques pleins identiques reliés par un axe autour duquel s'enroule une ficelle (Fig. 1).
L'exercice consiste à étudier le mouvement de 2 lourds yoyos métalliques qui roulent sans glisser sur un plan horizontal, tractés par des rats attachés à leurs ficelles.
Les conditions sont idéales : aucune perte d'énergie par frottement, ficelles sans masse, parfaitement flexibles et inextensibles.

2.1. A partir de la définition d'un moment d'inertie, démontrer la formule qui donne le moment d'inertie I du yoyo par rapport à son axe de symétrie (de révolution), en négligeant la contribution de l'axe (le petit cylindre central) et compte tenu des dimensions données par la Fig. 1, ainsi que de sa masse totale M.

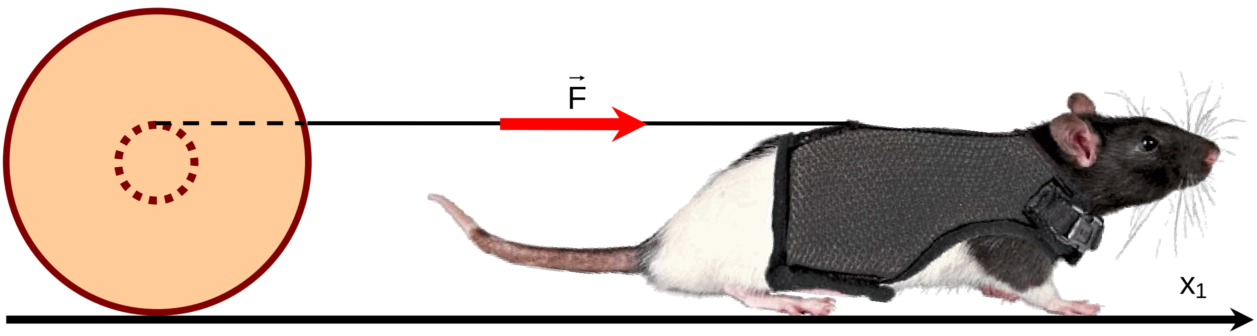


Fig. 2 : Le yoyo 1 est tiré par le rat 1, horizontalement au-dessus de son axe.

Le yoyo 1 est initialement posé immobile sur un plan horizontal, où il peut rouler sans glisser, tiré par sa ficelle, qui est enroulée de façon à tangenter le point haut de son axe.
Un rat, le rat 1, est attelé à l'autre extrémité de la ficelle, sur laquelle il tire avec un effort horizontal constant $\vec{F}$ (Fig. 2), à partir de l'instant t = 0.

**CP46 – Automne 2011**
**Corrigé de l'examen FINAL**
**19/01/2012**

2.2. Effectuer un bilan des efforts qui s'exercent sur le yoyo 1 et exprimer le théorème de la résultante dynamique, en notant $x_1''$ l'accélération de son centre de gravité.

2.3. Effectuer un bilan des moments qui s'exercent sur le yoyo 1 et exprimer le théorème du moment dynamique, en notant $\theta_1''$ son accélération angulaire.

2.4. En tenant compte, en plus, de la condition de roulement sans glissement, déterminer l'accélération $x_1''$.

2.5. A l'instant t = 0, le centre de gravité du yoyo 1 est positionné en $x_1 = 0$.
Donner l'équation de son mouvement d'ensemble ultérieur, c'est-à-dire l'expression de la position $x_1$ de son centre de gravité en fonction du temps.

2.6. Au bout de quel temps $T_1$ le yoyo 1 arrive-t-il à la position $x_1 = L$ ?

2.7. Quelle est alors la vitesse $V_1^L$ de son centre de gravité ?

2.8. Quelle distance $L_1$ le rat 1 a-t-il parcourue quand le centre de gravité du yoyo 1 atteint la position $x_1 = L$ ?

2.9. Quelle est alors l'énergie cinétique $E_{C1}^L$ du yoyo 1 ?
Exprimer cette énergie cinétique en fonction de l'effort F, de la distance L et des rayons $R_a$ et $R_e$ uniquement.

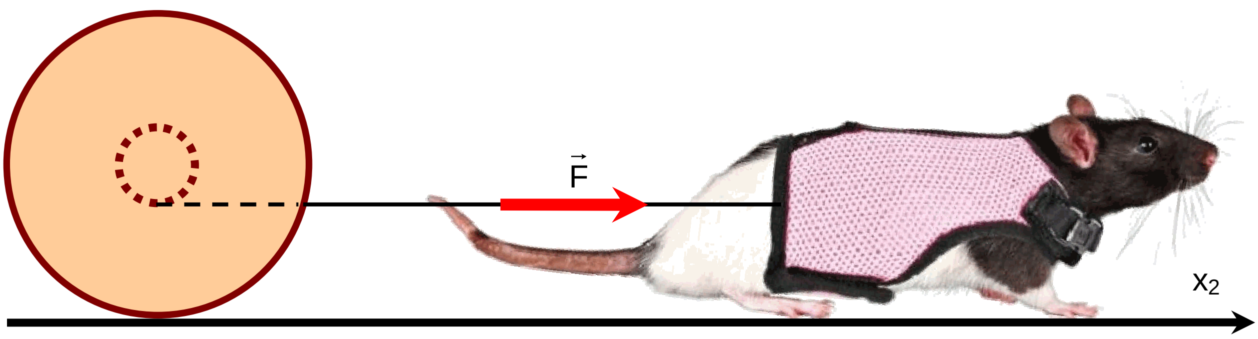


Fig. 3 : Le yoyo 2 est tiré par le rat 2, horizontalement en-dessous de son axe.

Le yoyo 2, identique au yoyo 1, est également posé immobile sur le même plan horizontal, où il peut également rouler sans glisser, tiré par sa ficelle qui est enroulée de façon à tangenter le point bas de son axe (ce qui est différent du yoyo 1).
Le centre de gravité du yoyo 2 est initialement positionné en $x_2 = 0$
Un autre rat, le rat 2, est attelé à l'autre extrémité de la ficelle du yoyo 2, sur laquelle il tire avec le même effort horizontal constant $\vec{F}$ que le rat 1, à partir de l'instant t = 0 également (Fig. 3).
La longueur de la ficelle est telle que l'effort $\vec{F}$ peut être exercé dans les mêmes conditions tout au long de la course.

2.10. Comme pour le yoyo 1, effectuer un bilan des efforts et moments qui s'exercent sur le yoyo 2, en déduire l'accélération $x_2''$ de son centre de gravité et donner l'équation de son mouvement d'ensemble, c'est-à-dire l'expression de la position $x_2$ de son centre de gravité en fonction du temps.

**CP46 – Automne 2011**
**Corrigé de l'examen FINAL**
**19/01/2012**

2.11. Partant de la position $x_2 = 0$, au bout de quel temps $T_2$ le yoyo 2 arrive-t-il à la position $x_2 = L$ ?
Quelle est alors la vitesse $V_2^L$ de son centre de gravité ?

2.12. Quelle distance $L_2$ le rat 2 a-t-il parcourue quand le centre de gravité du yoyo 2 atteint la position $x_2 = L$ ?

2.13. Quelle est alors l'énergie cinétique $E_{C2}^L$ du yoyo 2 ?
Exprimer cette énergie cinétique en fonction de l'effort F, de la distance L et des rayons $R_a$ et $R_e$ uniquement.

2.14. Commenter.
Lequel des 2 yoyos parcourt le plus rapidement la distance L ?
Après avoir parcouru cette distance, lequel possède la plus grande énergie cinétique ?
Quel est le travail, $W_1$ ou $W_2$, fourni par chacun des 2 rats ?
Quel rapport y a-t-il entre le travail fourni par un rat et l'énergie cinétique que possède le yoyo qu'il a tracté, quand il arrive en $x_1 = L$ ou $x_2 = L$ ?

2.15. Application numérique :
$M = 1$ kg $\quad$ $R_e = 50$ mm $\quad$ $R_a = 10$ mm
$L = 2$ m $\quad$ $F = 5$ N
Calculer les durées $T_1$ et $T_2$, ainsi que les travaux mécaniques $W_1$ et $W_2$.

**Eléments de réponses**

Question 1.1
Comme toute énergie, l'énergie potentielle $E_p$ s'exprime en J, c'est-à-dire en $m^2$ kg $s^{-2}$.
Les paramètres A et B s'expriment donc en kg $s^{-2}$.
Le paramètre C s'exprime donc en m kg $s^{-2}$.

Question 1.2
Une force $\vec{F}$ dérivant d'une énergie potentielle s'exprime par : $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_P$

$$\boxed{\vec{F} = \begin{pmatrix} -2\,A\,x \\ -2\,B\,y \\ C \end{pmatrix}}$$

Question 1.3
Principe fondamental de la dynamique appliqué à un point de masse M : $\vec{F} = M\vec{\Gamma}$

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \frac{1}{M}\begin{pmatrix} -2\,A\,x \\ -2\,B\,y \\ C \end{pmatrix}}$$

Question 1.4

Par définition du vecteur accélération $\vec{\Gamma} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$

Le système d'équations différentielles en découle :

$$\boxed{\begin{cases} M\,x'' + 2\,A\,x = 0 \\ M\,y'' + 2\,B\,y = 0 \\ M\,z'' - C = 0 \end{cases}}$$

Question 1.5

Solution générale : $x(t) = K_1 \cos\left(\sqrt{\frac{2\,A}{M}}\,t\right) + K_2 \sin\left(\sqrt{\frac{2\,A}{M}}\,t\right)$

Les constantes d'intégration $K_1$ et $K_2$ sont déduites des conditions initiales $x(0) = x_0$ et $x'(0) = 0$.

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{2\,A}{M}}\,t\right)}$$

Question 1.6

Solution générale : $y(t) = K_3 \cos\left(\sqrt{\frac{2\,B}{M}}\,t\right) + K_4 \sin\left(\sqrt{\frac{2\,B}{M}}\,t\right)$

Les constantes d'intégration $K_3$ et $K_4$ sont déduites des conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = V_{0Y}$.

$$\boxed{y(t) = V_{0Y}\sqrt{\frac{M}{2\,B}}\,\sin\left(\sqrt{\frac{2\,B}{M}}\,t\right)}$$

Question 1.7

Solution générale : $z(t) = \frac{C}{2\,M}\,t^2 + K_5\,t + K_6$

Les constantes d'intégration $K_5$ et $K_6$ sont déduites des conditions initiales $z(0) = z_0$ et $z'(0) = V_{0Z}$

$$\boxed{z(t) = \frac{C}{2\,M}\,t^2 + V_{0Z}\,t + z_0}$$

Question 1.8
Equations de la trajectoire dans le cas particulier :

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{2\,A}{M}}\,t\right) \qquad y(t) = x_0 \sin\left(\sqrt{\frac{2\,A}{M}}\,t\right) \qquad z(t) = z_0}$$

La trajectoire est un cercle de rayon $x_0$ centré sur l'axe z, dans le plan $z = z_0$ (Fig. 4).

<u>Question 1.9</u>

Equations de la trajectoire dans le cas particulier :

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{2\,A}{M}}\;t\right) \qquad y(t) = x_0 \sin\left(\sqrt{\frac{2\,A}{M}}\;t\right) \qquad z(t) = \frac{C}{2\,M}\,t^2 + z_0}$$

La trajectoire est une hélice à pas variable centrée sur l'axe z, de rayon $x_0$, partant du plan $z = z_0$, sans vitesse initiale dans la direction z (Fig. 5).

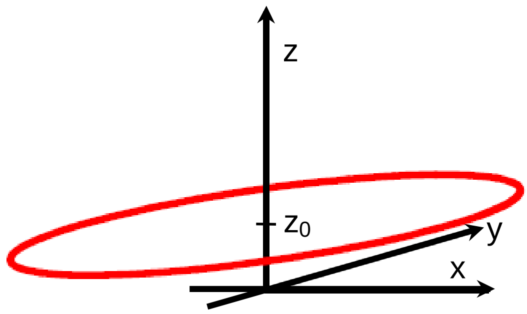


Fig. 4 : Trajectoire circulaire.

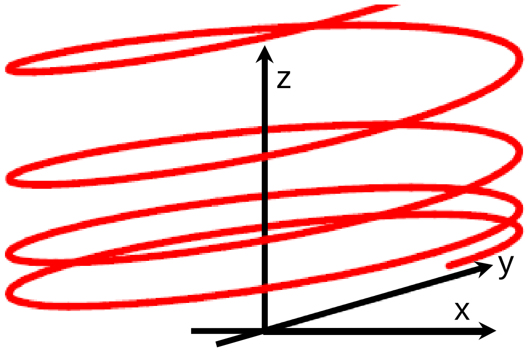


Fig. 5 : Trajectoire hélicoïdale.

<u>Question 2.1</u>

Définition du moment d’inertie d'un solide S :

$I = \iiint_S \rho\, r^2\, dv$ , où r est la distance du point courant à l'axe par rapport auquel le moment d'inertie est calculé.

Dans le cas des 2 disques, les coordonnées cylindriques s’imposent.

$$I = 2 \iiint_{Disque} \rho\, r^3\, dr\, d\theta\, dz$$

$$I = \pi\, \rho\, b\, R_e^4$$

En faisant intervenir la masse $M = 2\,\pi\,\rho\,b\,R_e^2$ :

$$\boxed{I = \frac{1}{2} M\, R_e^2}$$

<u>Question 2.2</u>

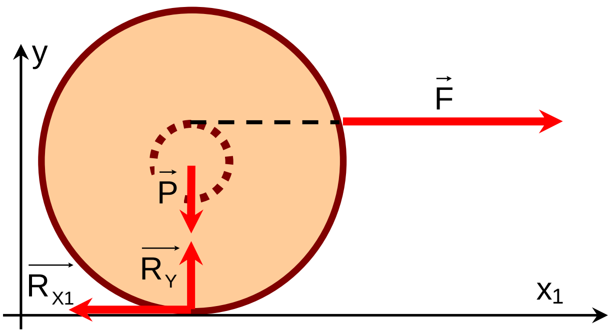


Fig. 6 : Efforts sur le yoyo 1.

Efforts appliqués au yoyo 1 dans la direction verticale y :

- Son poids $\vec{P}$,
- La réaction $\vec{R_Y}$ du plan de roulement, égale et opposée à $\vec{P}$.

Efforts appliqués au yoyo dans la direction horizontale $x_1$ :

- La force de traction $\vec{F}$ exercée par la ficelle,
- La réaction $\vec{R_{x1}}$ du plan de roulement.

Théorème de la résultante dynamique, en projection dans la direction $x_1$ :

$$\boxed{F - R_{X1} = M\, x_1''}$$

Question 2.3

Les efforts $\vec{F}$ et $\overrightarrow{R_{X1}}$ induisent des moments par rapport au centre de gravité du yoyo.
Le théorème du moment dynamique donne la relation qui lie la somme de ces moments à l'accélération angulaire $\theta_1''$.

$$\boxed{-F\,R_a - R_{X1}\,R_e = I\,\theta_1''}$$

Question 2.4

La condition de roulement sans glissement fournit une équation supplémentaire qui lie l'accélération horizontale $x_1''$ à l'accélération angulaire $\theta_1''$.

$$\theta_1'' = -\frac{x_1''}{R_e}$$

Cette condition, avec les équations répondant aux 2 questions précédentes, permet de déterminer $x_1''$, soit, après avoir remplacé le moment d'inertie I par sa valeur :

$$\boxed{x_1'' = \frac{2\,F}{3\,M}\left(1 + \frac{R_a}{R_e}\right)}$$

Question 2.5

Il s'agit d'un mouvement uniformément accéléré.
$x_1(t)$ est obtenu par intégration de $x_1''$, en tenant compte des conditions initiales $x_1(0) = 0$ et $x_1'(0) = 0$.

$$\boxed{x_1(t) = \frac{F\,t^2}{3\,M}\left(1 + \frac{R_a}{R_e}\right)}$$

Question 2.6

Il suffit d'écrire l'équation de la trajectoire du yoyo 1 pour l'instant t = $T_1$ :
$x_1(T_1) = L$

$$\boxed{T_1 = \sqrt{\frac{3\,M\,L\,R_e}{F\,(R_e + R_a)}}}$$

Question 2.7

La première intégration de $x_1''$, effectuée pour la question 2.5, donne la valeur de la vitesse $x_1'(t)$.
$x_1'(t) = x_1''\,t$
D'où la vitesse demandée en fonction des résultats précédents :
$V_1^L = x_1''\,T_1$

$$\boxed{V_1^L = 2\sqrt{\frac{F\,L\,(R_e + R_a)}{3\,M\,R_e}}}$$

**CP46 – Automne 2011**
**Corrigé de l'examen FINAL**
**19/01/2012**

Question 2.8

Au cours du mouvement, la ficelle, initialement enroulée sur l'axe du yoyo 1, se déroule.
Le rat 1 a donc avancé de la distance L parcourue par le yoyo 1 augmentée de la longueur $L_{fder}$ de ficelle déroulée.

$L_1 = L + L_{fder}$

En parcourant la distance L, le yoyo 1 a tourné d'un angle de $\dfrac{L}{R_e}$ rd.

La longueur de ficelle déroulée est donc $L_{fder} = \dfrac{L\,R_a}{R_e}$.

$$\boxed{L_1 = L\left(1+\frac{R_a}{R_e}\right)}$$

Question 2.9

L'énergie cinétique du yoyo 1 arrivé en $x_1 = L$ est la somme de son énergie cinétique de translation et de son énergie cinétique de rotation.

$$E^L_{C1} = \frac{1}{2} M\, x_1'(T_1)^2 + \frac{1}{2} I\, \theta_1'(T_1)^2$$

$$\boxed{E^L_{C1} = F\,L\left(1+\frac{R_a}{R_a}\right)}$$

Question 2.10

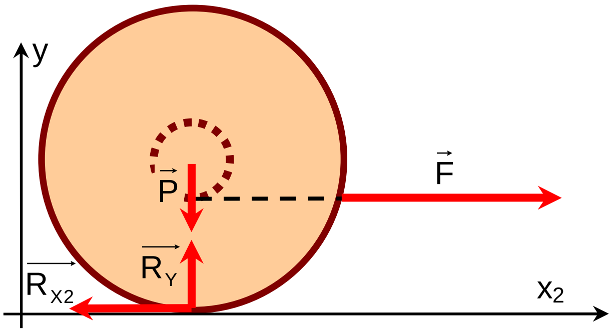


Fig. 7 : Efforts sur le yoyo 1.

Efforts appliqués au yoyo 2 dans la direction verticale y (de même que pour le yoyo 1) :

- Son poids $\vec{P}$,
- La réaction $\overrightarrow{R_Y}$ du plan de roulement, égale et opposée à $\vec{P}$.

Efforts appliqués au yoyo 2 dans la direction horizontale $x_2$ :

- La force de traction $\vec{F}$ exercée par la ficelle,
- La réaction $\overrightarrow{R_{X2}}$ du plan de roulement.

Théorème de la résultante dynamique, en projection dans la direction $x_2$ :

$F - R_{X2} = M\, x_2''$

Les efforts $\vec{F}$ et $\overrightarrow{R_{X2}}$ induisent des moments par rapport au centre de gravité du yoyo 2.

Le théorème du moment dynamique donne la relation qui lie la somme de ces moments à l'accélération angulaire $\theta_2''$.

$F\,R_a - R_{X2}\,R_e = I\,\theta_2''$

Remarque : par rapport au yoyo 1, le moment dû à la force $\vec{F}$ possède le signe contraire.

Ces 2 équations, avec la condition de roulement sans glissement $\theta_2'' = -\frac{x_2''}{R_e}$, permettent de déterminer $x_2''$.

$$\boxed{x_2'' = \frac{2F}{3M}\left(1 - \frac{R_a}{R_e}\right)}$$

$x_2(t)$ est obtenu par intégration de $x_2''$, en tenant compte des conditions initiales $x_2(0) = 0$ et $x_2'(0) = 0$.

$$\boxed{x_2(t) = \frac{F\,t^2}{3M}\left(1 - \frac{R_a}{R_e}\right)}$$

Question 2.11

Il suffit d'écrire l'équation de la trajectoire du yoyo 2 pour l'instant t = $T_2$ :

$x_2(T_2) = L$

$$\boxed{T_2 = \sqrt{\frac{3MLR_e}{F(R_e - R_a)}}}$$

La première intégration de $x_2''$, donne la valeur de la vitesse $x_2'(t)$.

$x_2'(t) = x_2''\,t$

D'où la vitesse demandée en fonction des résultats précédents :

$V_2^L = x_2''\,T_2$

$$\boxed{V_2^L = 2\sqrt{\frac{FL(R_e - R_a)}{3MR_e}}}$$

Question 2.12

Au cours du mouvement, la ficelle s'enroule sur l'axe du yoyo 2.

Le rat 2 a donc avancé de la distance L parcourue par le yoyo 2 diminuée de la longueur $L_{fenr}$ de ficelle enroulée.

$L_2 = L - L_{fenr}$

Tout comme le yoyo 1, le yoyo 2 a tourné d'un angle de $\frac{L}{R_e}$ rd en avançant de L.

La longueur de ficelle enroulée est donc $L_{fenr} = \frac{L\,R_a}{R_e}$.

$$\boxed{L_2 = L\left(1 - \frac{R_a}{R_e}\right)}$$

Question 2.13

De même que pour le yoyo 1 :

$$E^{L}_{C2} = \frac{1}{2} M\, x_2'(T_2)^2 + \frac{1}{2} I\, \theta_2'(T_2)^2$$

$$\boxed{E^{L}_{C2} = F\,L\left(1 - \frac{R_a}{R_e}\right)}$$

Question 2.14

Rapport des temps mis par les 2 yoyos pour parcourir la même distance : $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{R_e - R_a}{R_e + R_a}}$

Ce rapport étant inférieur à 1, c'est le yoyo 1 qui parcourt le plus rapidement la distance L.

Rapport des énergies cinétiques à l'arrivée : $\frac{E^{L}_{C1}}{E^{L}_{C1}} = \frac{R_e + R_a}{R_e - R_a}$

Ce rapport étant supérieur à 1, c'est le yoyo 1 qui possède la plus grande énergie cinétique.

Le travail fourni par chacun des 2 rats est égal à l'effort avec lequel il tire multiplié par la distance parcourue.

Rat 1 : $W_1 = F\,L_1$

$$\boxed{W_1 = F\,L\left(1 + \frac{R_a}{R_e}\right)}$$

Rat 2 : $W_2 = F\,L_2$

$$\boxed{W_2 = F\,L\left(1 - \frac{R_a}{R_e}\right)}$$

Il apparaît que l'énergie cinétique de chacun des 2 yoyos à l'arrivée est égale au travail que son rat a fourni (c'est exactement ce que dit le théorème de l'énergie cinétique).

Question 2.15

$\boxed{T_1 = 31{,}6\ \text{s}}$

$\boxed{T_2 = 38{,}7\ \text{s}}$

$\boxed{W_1 = 12\ \text{J}}$

$\boxed{W_2 = 8\ \text{J}}$