CP46 – Automne 2011
Sujet de l'examen FINAL
19/01/2012

2 exercices indépendants - Durée : 2 h - Documents autorisés

Conseils et consignes :

- Lire l'énoncé.
- Respecter les notations de l'énoncé.
- Identifier les questions.
- Encadrer les résultats.
- Numéroter les feuilles (1 feuille = 4 pages) en indiquant le nombre total de feuilles (Exemple : 1/3, 2/3, 3/3).

1. Potentiel exotique

Le professeur Tournesol a mis au point une chambre expérimentale où il est possible de générer un champ d'énergie potentielle E_p de la forme :

$$E_p = A\,x^2 + B\,y^2 - C\,z$$

x, y et z sont les coordonnées d'un point dans un repère d'origine O fixe par rapport à la chambre.
A, B et C sont des paramètres ajustables, positifs.
Aucune autre énergie potentielle n'agit dans la chambre.

1.1. Dans le système international, quelles sont les unités des paramètres A, B et C (les réponses ne feront apparaître que les unités de base, qui sont le m, le kg et la s).

1.2. Quel est le champ de forces $\vec{F}$ qui dérive de l'énergie potentielle E_p ?

1.3. Une bille, qui peut être considérée comme ponctuelle, est positionnée en un point quelconque de la chambre et libérée dans le champ de forces à l'instant t = 0.
Quel est son vecteur accélération $\vec{\Gamma}$ à un instant ultérieur quelconque, en fonction de sa masse M, des paramètres A, B et C, ainsi que de ses coordonnées ?

1.4. En déduire les 3 équations différentielles qui permettront de déterminer la trajectoire de la bille.

A l'instant t = 0, la bille est libérée au point $\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ avec la vitesse $\begin{pmatrix} 0 \\ V_{0Y} \\ V_{0Z} \end{pmatrix}$.

Les questions suivantes permettront de déterminer la trajectoire qu'elle suivra pour tout instant ultérieur t > 0.

1.5. Résoudre l'équation différentielle qui fait intervenir x et exprimer x(t).

1.6. Résoudre l'équation différentielle qui fait intervenir y et exprimer y(t).

1.7. Résoudre l'équation différentielle qui fait intervenir z et exprimer z(t).

1.8. Cas particulier 1 : B = A, C = 0, $V_{0Y} = x_0 \sqrt{\frac{B}{M}}$, $V_{0Z} = 0$.

Quelle est la trajectoire décrite par la bille ?
Illustrer la réponse par un croquis.

1.9. Cas particulier 2 : B = A, C ≠ 0, $V_{0Y} = x_0 \sqrt{\frac{B}{M}}$, $V_{0Z} = 0$.

Quelle est la trajectoire décrite par la bille ?
Illustrer la réponse par un croquis.

2. Course de yoyos tractés par des rats

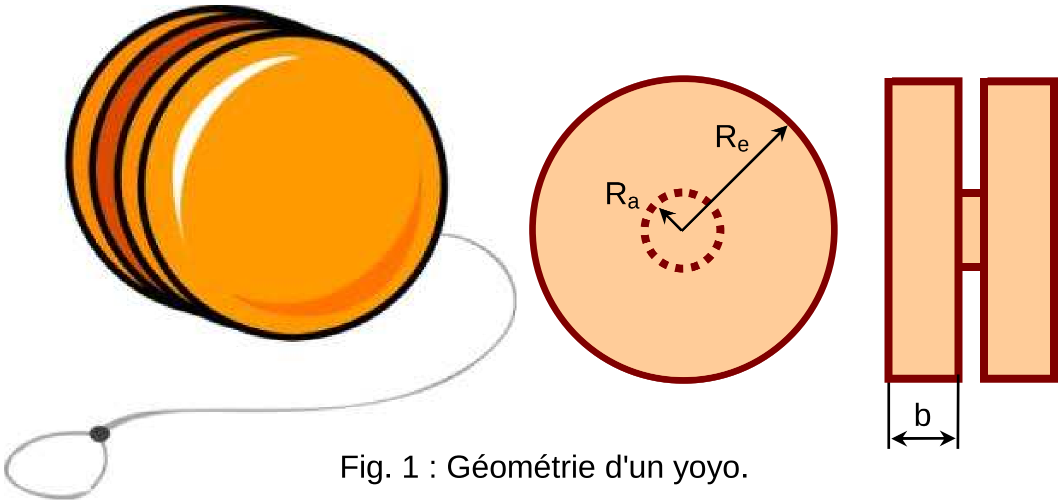

Fig. 1 : Géométrie d'un yoyo.

Un yoyo est constitué de 2 disques pleins identiques reliés par un axe autour duquel s'enroule une ficelle (Fig. 1).
L'exercice consiste à étudier le mouvement de 2 lourds yoyos métalliques qui roulent sans glisser sur un plan horizontal, tractés par des rats attachés à leurs ficelles.
Les conditions sont idéales : aucune perte d'énergie par frottement, ficelles sans masse, parfaitement flexibles et inextensibles.

2.1. A partir de la définition d'un moment d'inertie, démontrer la formule qui donne le moment d'inertie I du yoyo par rapport à son axe de symétrie (de révolution), en négligeant la contribution de l'axe (le petit cylindre central) et compte tenu des dimensions données par la Fig. 1, ainsi que de sa masse totale M.

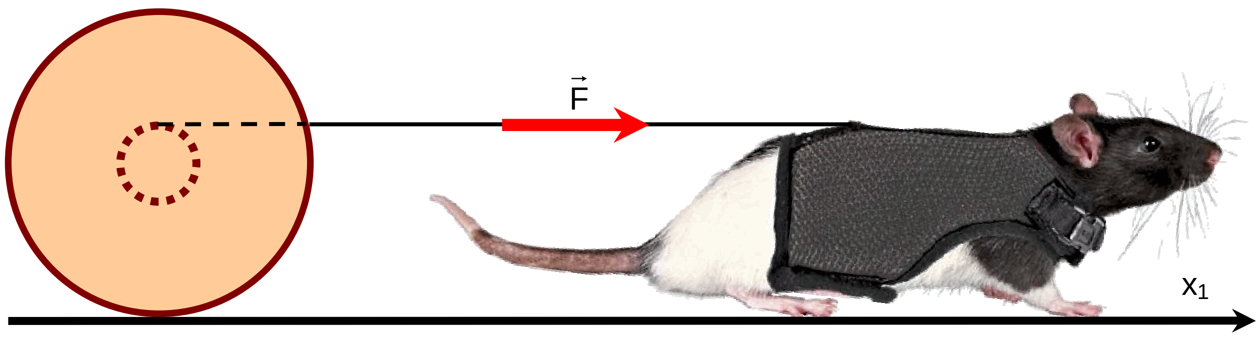

Fig. 2 : Le yoyo 1 est tiré par le rat 1, horizontalement au-dessus de son axe.

Le yoyo 1 est initialement posé immobile sur un plan horizontal, où il peut rouler sans glisser, tiré par sa ficelle, qui est enroulée de façon à tangenter le point haut de son axe.
Un rat, le rat 1, est attelé à l'autre extrémité de la ficelle, sur laquelle il tire avec un effort horizontal constant $\vec{F}$ (Fig. 2), à partir de l'instant t = 0.

2.2. Effectuer un bilan des efforts qui s'exercent sur le yoyo 1 et exprimer le théorème de la résultante dynamique, en notant x_1'' l'accélération de son centre de gravité.

2.3. Effectuer un bilan des moments qui s'exercent sur le yoyo 1 et exprimer le théorème du moment dynamique, en notant θ_1'' son accélération angulaire.

2.4. En tenant compte, en plus, de la condition de roulement sans glissement, déterminer l'accélération x_1''.

2.5. A l'instant t = 0, le centre de gravité du yoyo 1 est positionné en $x_1 = 0$.
Donner l'équation de son mouvement d'ensemble ultérieur, c'est-à-dire l'expression de la position x_1 de son centre de gravité en fonction du temps.

2.6. Au bout de quel temps T_1 le yoyo 1 arrive-t-il à la position $x_1 = L$?

2.7. Quelle est alors la vitesse V_1^L de son centre de gravité ?

2.8. Quelle distance L_1 le rat 1 a-t-il parcourue quand le centre de gravité du yoyo 1 atteint la position $x_1 = L$?

2.9. Quelle est alors l'énergie cinétique E_{C1}^L du yoyo 1 ?
Exprimer cette énergie cinétique en fonction de l'effort F, de la distance L et des rayons R_a et R_e uniquement.

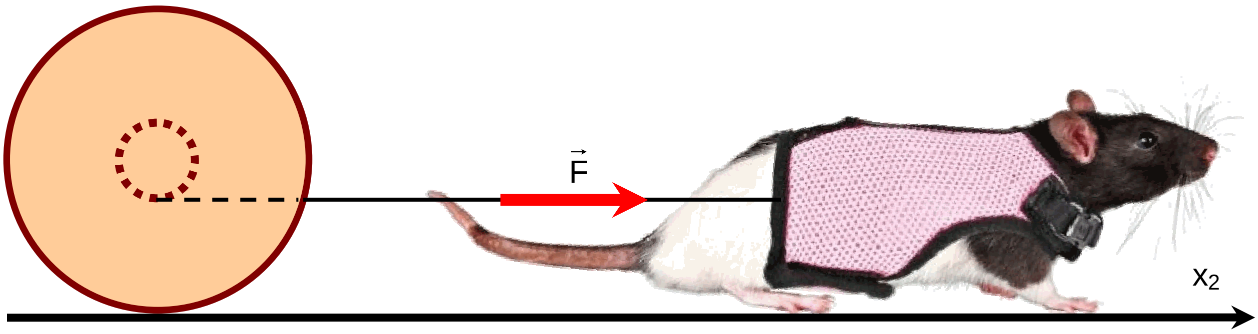

Fig. 3 : Le yoyo 2 est tiré par le rat 2, horizontalement en-dessous de son axe.

Le yoyo 2, identique au yoyo 1, est également posé immobile sur le même plan horizontal, où il peut également rouler sans glisser, tiré par sa ficelle qui est enroulée de façon à tangenter le point bas de son axe (ce qui est différent du yoyo 1).
Le centre de gravité du yoyo 2 est initialement positionné en $x_2 = 0$
Un autre rat, le rat 2, est attelé à l'autre extrémité de la ficelle du yoyo 2, sur laquelle il tire avec le même effort horizontal constant $\vec{F}$ que le rat 1, à partir de l'instant t = 0 également (Fig. 3).

La longueur de la ficelle est telle que l'effort $\vec{F}$ peut être exercé dans les mêmes conditions tout au long de la course.

2.10. Comme pour le yoyo 1, effectuer un bilan des efforts et moments qui s'exercent sur le yoyo 2, en déduire l'accélération x_2'' de son centre de gravité et donner l'équation de son mouvement d'ensemble, c'est-à-dire l'expression de la position x_2 de son centre de gravité en fonction du temps.

2.11. Partant de la position $x_2 = 0$, au bout de quel temps T_2 le yoyo 2 arrive-t-il à la position $x_2 = L$?
Quelle est alors la vitesse V_2^L de son centre de gravité ?

2.12. Quelle distance L_2 le rat 2 a-t-il parcourue quand le centre de gravité du yoyo 2 atteint la position $x_2 = L$?

2.13. Quelle est alors l'énergie cinétique E_{C2}^L du yoyo 2 ?
Exprimer cette énergie cinétique en fonction de l'effort F, de la distance L et des rayons R_a et R_e uniquement.

2.14. Commenter.
Lequel des 2 yoyos parcourt le plus rapidement la distance L ?
Après avoir parcouru cette distance, lequel possède la plus grande énergie cinétique ?
Quel est le travail, W_1 ou W_2, fourni par chacun des 2 rats ?
Quel rapport y a-t-il entre le travail fourni par un rat et l'énergie cinétique que possède le yoyo qu'il a tracté, quand il arrive en $x_1 = L$ ou $x_2 = L$?

2.15. Application numérique :

$M = 1$ kg	$R_e = 50$ mm	$R_a = 10$ mm
$L = 2$ m	$F = 5$ N	

Calculer les durées T_1 et T_2, ainsi que les travaux mécaniques W_1 et W_2.