CP46 - Automne 2012
Sujet de l'Examen FINAL
17/01/2013

Durée : 2 h - Documents autorisés

Conseils et consignes :

- Lire l'énoncé.
- Respecter les notations de l'énoncé.
- Identifier les questions.
- Encadrer les résultats.
- Numéroter les feuilles (1 feuille = 4 pages) en indiquant le nombre total de feuilles (Exemple : 1/3, 2/3, 3/3).

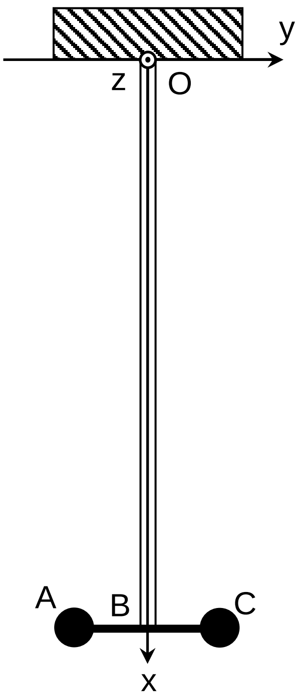

Fig. 1 : Poutre et masses.

La Fig. 1 ci-contre représente un système mécanique composé de :

- Une poutre verticale OB, de section circulaire, constituée d'un matériau élastique linéaire, et encastrée au point O.
- Un barreau horizontal ABC, qui peut être considéré comme indéformable.
- 2 masses positionnées en A et C, qui peuvent être considérées comme ponctuelles.

Les masses de la poutre OB et du barreau ABC sont négligeables par rapport aux masses ponctuelles en A et C.

Données concernant la poutre OB :

- L : longueur, ou distance OB.
- R : rayon de la section.
- E : module d'Young du matériau.
- ν : coefficient de Poisson du matériau.

Autres données :

- a : distance AB ou BC (B est le centre du barreau ABC).
- M : valeur de chacune des 2 masses.
- g : accélération de la pesanteur.

1. Démontrer la formule qui donne le moment d'inertie polaire I_G d'une section de la poutre en fonction de son rayon.
2. En déduire l'expression du moment quadratique I_Z de la même section par rapport à la direction z.
3. P désignant le poids de chacune des 2 masses, quelle est l'expression de l'effort normal qui apparaît le long de la poutre ?
4. Déterminer le champ des contraintes dues à cet effort normal.

En plus du poids des 2 masses, un effort $\overrightarrow{F_C} = \begin{pmatrix} -2P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est appliqué au point C.

5. Quelle est l'expression du moment fléchissant qui apparaît le long de la poutre ?

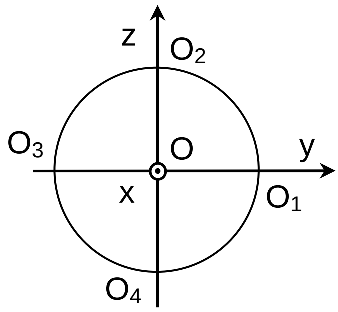

Fig. 2 : Section de la poutre en x = 0.

6. Déterminer le champ des contraintes dues à ce moment fléchissant.
7. Quelles sont les expressions de ces contraintes aux points O_1, O_2, O_3 et O_4 définis par la Fig. 2 ci-contre ?
8. Donner l'équation différentielle qui lie le déplacement transversal d'une section de la poutre au moment fléchissant.
9. Intégrer une première fois cette équation différentielle pour obtenir les rotations des sections de la poutre.
10. Quel est le déplacement latéral de l'extrémité B de la poutre, en fonction uniquement des grandeurs données au début de cet énoncé ?

2 efforts supplémentaires $\overrightarrow{F_A}$ et $\overrightarrow{F_B}$ (en plus des poids et de l'effort $\overrightarrow{F_C}$ défini précédemment) sont appliqués respectivement aux points A et B.

$$\overrightarrow{F_A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{F_B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{pmatrix}$$

11. Quelle est l'expression du moment de torsion qui apparaît le long de la poutre ?
12. Calculer l'angle dont la section d'extrémité (en B) tourne autour de l'axe Ox.
13. En déduire la rigidité en torsion de la poutre, c'est-à-dire le rapport entre le moment appliqué en B suivant l'axe Ox et l'angle dont la section d'extrémité (en B) tourne autour de ce même axe.
Exprimer cette rigidité en fonction uniquement des grandeurs données au début de cet énoncé.

Remarque : à ce niveau, il est possible de passer directement à la question 17 (en lisant le paragraphe qui la précède).

14. Déterminer le champ des contraintes dues au moment de torsion, en particulier aux points O_1, O_2, O_3 et O_4 définis par la Fig. 2 ci-dessus.
15. Donner la matrice des contraintes qui apparaissent au point O_3 sous l'effet de l'ensemble des efforts appliqués (les poids des masses, $\overrightarrow{F_A}$, $\overrightarrow{F_B}$ et $\overrightarrow{F_C}$).
16. Quelles sont les 3 contraintes principales au point O_3 ?

Les efforts $\overrightarrow{F_A}$, $\overrightarrow{F_B}$ et $\overrightarrow{F_C}$ n'existent plus.

Une rotation θ_0 autour de l'axe Ox est imposée au barreau ABC, grâce à un moment appliqué en B.
A l'instant t = 0, ce moment disparaît et le barreau ABC commence à osciller, avec une vitesse initiale nulle.

17. Quel est le moment qui agit sur le solide ABC (barreau et masses) à un instant ultérieur t > 0 ?

18. Quelle est l'équation différentielle à laquelle obéit alors son mouvement, supposé non-amorti ?

19. Résoudre cette équation différentielle et donner l'équation du mouvement de rotation du barreau ABC, en fonction du temps.

20. Quelle est la fréquence de ces oscillations libres ?

21. Calculer numériquement cette fréquence pour :

- L = 1 m
- a = 100 mm
- $E = 2.10^5$ Mpa
- R = 5 mm
- M = 5 kg
- ν = 0,3