utbm
université de technologie
Belfort-Montbéliard

CP46 – Automne 2005
Corrigé de l'Examen MEDIAN
14/11/2005

Marianne joue à la balle

5 exercices indépendants - Durée : 2 h - Documents autorisés

1 - Marianne lance sa balle

Dans cet exercice, la balle de Marianne est considérée comme un point pesant de masse M.

Marianne est debout sur le point O, origine d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, dans lequel un point possède les coordonnées x, y et z.

Nous sommes sur terre, dans un champ de pesanteur uniforme, dont l'accélération est $\vec{G} = -g\,\vec{k}$.

Avant de la lâcher, Marianne impose à sa balle une accélération constante, depuis l'immobilité jusqu'à une vitesse $\vec{V_0}$, le long d'un parcours rectiligne de longueur L inclus dans le plan $x = 0$ et faisant un angle α positif avec le vecteur horizontal $\vec{j}$, ce qui implique que l'angle $(\vec{j}, \vec{V_0})$ a la même valeur α.

L'énergie de la balle est considérée comme nulle au départ de ce parcours imposé par le bras de Marianne.

Au moment où la balle est lâchée, quelles sont ses énergies cinétique et potentielle de pesanteur ?
Quelle quantité d'énergie Marianne a-t-elle fourni à la balle ?
En supposant qu'elle a appliqué un effort constant, quelle est la valeur de cet effort ?
Quelle est la valeur de l'accélération ?
Combien de temps dure ce lancement, entre l'instant où Marianne met sa balle en mouvement et l'instant où elle la lâche ?

Tous ces résultats seront exprimés littéralement, puis calculés pour les valeurs numériques suivantes :

- $M = 100\text{ g}$
- $V_0 = 10\text{ m/s}$
- $\alpha = \pi/4$
- $g = 9{,}81\text{ m/s}^2$
- $L = 80\text{ cm}$

1 - Corrigé

Energie cinétique acquise par la balle :

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2} M V_0^2}$$

Energie potentielle de pesanteur acquise par la balle :

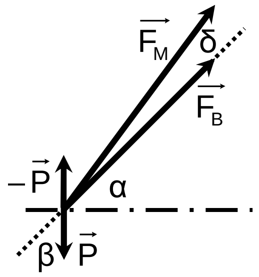
$$U = M\,g\,\Delta z$$

$$\boxed{U = M\,g\,L\,\sin\alpha}$$

Energie fournie à la balle :

$E = E_C + U$

$$\boxed{E = M\left(\frac{V_0^2}{2} + g\,L\,\sin\alpha\right)}$$



L'effort $\overrightarrow{F_B}$ vu par la balle est la résultante de son poids $\vec{P}$ et de l'effort $\overrightarrow{F_M}$ exercé par la main de Marianne.

$\overrightarrow{F_B} = \vec{P} + \overrightarrow{F_M}$

Ou :

$\overrightarrow{F_M} = \overrightarrow{F_B} - \vec{P}$

Le travail de $-\vec{P}$ est égal à l'augmentation de l'énergie potentielle de pesanteur de la balle.
Le travail de $\overrightarrow{F_B}$ est égal à l'augmentation de l'énergie cinétique de la balle.

$F_B\,L = \frac{1}{2} M\,V_0^2$

$$\boxed{F_B = \frac{M\,V_0^2}{2\,L}}$$

Relation fondamentale de la dynamique appliquée à un point :

$F_B = M\,\gamma$

$$\boxed{\gamma = \frac{V_0^2}{2\,L}}$$

Soit s la distance parcourue le long de la ligne de lancement.

$s = \frac{1}{2}\gamma\,t^2$

Pour $s = L$, $t = \sqrt{\frac{2\,L}{\gamma}}$

Autre façon d'arriver au même résultat :

$V = \gamma\,t$, d'où $t = \frac{V_0}{\gamma}$ pour $s = L$.

$$\boxed{t = \frac{2\,L}{V_0}}$$

Effort exercé par la main de Marianne.

$\overrightarrow{F_M} = \overrightarrow{F_B} - \vec{P}$

Calcul du module de cet effort :

$$F_M^2 = F_B^2 + P^2 - 2\,F_B\,P\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$$

$$\boxed{F_M = \sqrt{F_B^2 + P^2 + 2\,F_B\,P\sin\alpha}}$$

Calcul de l'angle δ entre $\overrightarrow{F_M}$ et $\overrightarrow{F_B}$, en projetant les efforts sur un axe perpendiculaire au trajet de la balle :

$$F_M \sin\delta = P\sin\beta$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\sin\delta = \frac{P}{F_M}\cos\alpha$$

$$\boxed{\delta = \mathrm{Arc}\sin\left(\frac{P}{F_M}\cos\alpha\right)}$$

On peut vérifier que le travail de $\overrightarrow{F_M}$, dans son déplacement le long du parcours de la balle, est bien égal à E, augmentation de l'énergie totale de la balle.

$$\boxed{E = F_M\,L\cos\delta}$$

Application numérique :

$E_C = 5{,}00$ J	$F_B = 6{,}25$ N	$F_M = 6{,}98$ N
$U = 0{,}55$ J	$\gamma = 62{,}5\ m/s^2$	$\delta = 5{,}70°$
$E = 5{,}55$ J	$t = 0{,}160$ s	

2 - La balle de Marianne décrit une trajectoire

Dans cet exercice, la balle de Marianne est considérée comme un point matériel.
Marianne est debout sur le point O, origine d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, dans lequel un point possède les coordonnées x, y et z.
Nous sommes sur terre, dans un champ de pesanteur uniforme, dont l'accélération est $\vec{G} = -\,g\,\vec{k}$.
L'effet de l'air sur la balle est considéré comme négligeable.
A l'instant $t = 0$, Marianne lance sa balle au point (y_0, z_0) avec une vitesse initiale $\overrightarrow{V_0}$, de module V_0, incluse dans le plan $(\vec{j}, \vec{k})$ et faisant un angle $\alpha = (\vec{j}, \overrightarrow{V_0})$ positif avec le vecteur $\vec{j}$.

Ecrire les équations décrivant la trajectoire de la balle sous la forme :

$$\begin{cases} y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Comment s'appelle la courbe décrite par la balle ?
Au bout de combien de temps la balle atteint-elle son altitude maximale ?
Quelle est cette altitude ?
Au bout de combien de temps la balle retombe-t-elle sur le sol (plan $z = 0$) ?
A quelle distance des pieds de Marianne la balle retombe-elle sur le sol ?

Tous ces résultats seront exprimés littéralement, puis calculés pour les valeurs numériques suivantes :

- $g = 9{,}81\,m/s^2$
- $z_0 = 1{,}80\,m$
- $\alpha = \pi/4$
- $y_0 = 0$
- $V_0 = 10\,m/s$

2 - Corrigé

Equations définissant la trajectoire de la balle dans le plan $x = 0$:

$$\boxed{\begin{cases} y = V_0\ t\cos\alpha + y_0 \\ z = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 + V_0\ t\sin\alpha + z_0 \end{cases}}$$

La courbe décrite par un projectile dans un champ de pesanteur uniforme est une parabole.

L'altitude z est maximale à l'instant t_1 où sa dérivée par rapport au temps s'annule.

$$\frac{dz}{dt} = 0$$

$$-g\,t_1 + V_0\sin\alpha = 0$$

$$\boxed{t_1 = \frac{V_0\ \sin\alpha}{g}}$$

L'altitude maximale atteinte z_{Max} s'obtient en reportant cette valeur de t dans l'expression de z.

$$z_{Max} = -\frac{1}{2}\,g\left(\frac{V_0\ \sin\alpha}{g}\right)^2 + V_0\left(\frac{V_0\ \sin\alpha}{g}\right)\sin\alpha + z_0$$

$$\boxed{z_{Max} = \frac{V_0^2\ \sin^2\alpha}{2\,g} + z_0}$$

La balle retombe au sol au bout d'un temps t_2 tel que :

$$-\frac{1}{2}\,g\,t_2^2 + V_0\ t_2\ \sin\alpha + z_0 = 0$$

C'est une équation du second degré qui a 2 solutions.
La plus petite des 2 correspond à l'intersection de la parabole avec le sol derrière Marianne, où la balle n'était pas encore sur sa trajectoire.

On ne doit donc retenir que la plus grande des racines.

$$\boxed{t_2 = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\,g\,z_0}{V_0^2 \sin^2\alpha}}\right)}$$

La distance parcourue d s'obtient en reportant cette valeur dans l'expression de y.

$$\boxed{d = y_0 + \frac{V_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\,g\,z_0}{V_0^2 \sin^2\alpha}}\right)}$$

Application numérique :

$t_1 = 0{,}72$ s	$t_2 = 1{,}66$ s
$z_{Max} = 4{,}35$ m	$d = 11{,}8$ m

3 - Comment atteindre Marlène depuis une voiture ?

Dans cet exercice, la balle de Marianne est considérée comme un point matériel.
Marianne est à l'arrière d'une voiture qui passe devant la maison de son amie Marlène, qui se trouve justement à une fenêtre du premier étage.
Marianne veut lancer sa balle à Marlène.
Un repère fixe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, dans lequel un point possède les coordonnées x, y et z est installé sur la route, juste en face de la maison de Marlène, qui se trouve donc dans le plan $x = 0$.
La route est rectiligne, colinéaire à l'axe $(O, \vec{i})$.
Nous sommes sur terre, dans un champ de pesanteur uniforme, dont l'accélération est $\vec{G} = -g\,\vec{k}$.
L'effet de l'air sur la balle est considéré comme négligeable.
Un repère mobile $(O_V, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, dont les vecteurs de base sont parallèles à ceux du repère fixe, est solidaire de la voiture.
La voiture roule sur la route avec une vitesse constante $\vec{V_V}$.
$\vec{V_V} = -V_V\,\vec{i}$
A l'instant $t = 0$, Marianne, assise dans la voiture, lance sa balle au point de coordonnées $(0, y_0, z_0)$ dans le repère mobile, avec une vitesse initiale $\vec{V_0}$, de module V_0, incluse dans le plan $(\vec{j}, \vec{k})$ et faisant un angle $\alpha = (\vec{j}, \vec{V_0})$ positif avec le vecteur $\vec{j}$.
A ce moment-là, la voiture est à la distance D, comptée le long de la route, de la maison de Marlène.
Plus précisément, dans le repère fixe il y a un écart de D entre la coordonnée x de la main de Marianne et la coordonnée x des mains de Marlène.
A l'instant $t = t_1$, la voiture passe devant la maison de Marlène, les mains des 2 fillettes sont dans le même plan $(O, \vec{j}, \vec{k})$

Déterminer le vecteur vitesse de la balle en vol, en fonction du temps, dans le repère mobile lié à la voiture et dans le repère fixe lié à la route.
Ecrire les équations décrivant la trajectoire de la balle dans le repère fixe sous la forme :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Les mains de Marlène se trouvent en un point repéré par les coordonnées $(0, y_1, z_1)$ dans le repère fixe.

L'équation de la projection de la trajectoire de la balle dans le plan $(O, \vec{j}, \vec{k})$ peut se mettre sous la forme $z = f(y)$.

L'angle α étant imposé, utiliser cette expression pour calculer la vitesse de lancement V_0 nécessaire pour que la balle atteigne les mains de Marlène.
Le résultat s'exprime en fonction de $y_0, z_0, y_1, z_1, \alpha$ et g.
Quelle aura été la durée de vol de la balle ?
A quelle distance D de la maison de Marlène (distance suivant l'axe x, le long de la route) Marianne aura-t-elle dû lancer la balle pour qu'elle atteigne son but ?
Marianne pourrait-t-elle lancer sa balle à Marlène quelle que soit la hauteur z_1 où elle se trouve dans sa maison, la façade de la maison étant toujours dans le plan $y = y_1$?
Sinon, pour quelle altitude maximale z_{1Max} des mains de Marlène (dépendant de y_1) est-ce théoriquement possible ?
Quelle devrait alors être, ou vers quelle limite devrait alors tendre la vitesse de lancement V_0 ?

Ces résultats seront exprimés littéralement, puis calculés pour les valeurs numériques suivantes :

- $g = 9{,}81\,m/s^2$
- $V_V = 30\ km/h$
- $\alpha = \pi/4$
- $y_0 = 0$
- $z_0 = 1{,}50\ m$
- $y_1 = 10\ m$
- $z_1 = 4\ m$

3 - Corrigé

Le repère mobile étant en translation uniforme par rapport au repère fixe, il n'y a pas d'accélération d'entraînement ou de Coriolis.
L'accélération dans le repère mobile est donc la même que dans le repère fixe, soit
$\vec{G} = -g\,\vec{k}$

D'où, par intégration en fonction du temps, le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_R}$ dans le repère mobile.

$$\boxed{\overrightarrow{V_R} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_0 \cos\alpha \\ V_0 \sin\alpha - g\,t \end{pmatrix}}$$

La vitesse de la balle par rapport au repère fixe, ou vitesse absolue, est la somme de sa vitesse par rapport au repère mobile, ou vitesse relative, et de la vitesse d'entraînement, qui, dans notre cas, est la vitesse de la voiture $\overrightarrow{V_V}$.

$$\overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_R} + \overrightarrow{V_V}$$

$$\boxed{\overrightarrow{V_A} = \begin{pmatrix} -V_V \\ V_0 \cos\alpha \\ V_0 \sin\alpha - g\,t \end{pmatrix}}$$

D'où les équations décrivant la trajectoire de la balle dans le repère fixe, après intégration et en tenant compte des conditions initiales à l'instant $t = 0$.

$$\boxed{\begin{cases} x = -V_V\, t + D \\ y = V_0\, t \cos\alpha + y_0 \\ z = -\dfrac{1}{2}\, g\, t^2 + V_0\, t \sin\alpha + z_0 \end{cases}}$$

Pour écrire z en fonction de y, il faut éliminer t entre les expressions de y et z.

$$t = \frac{y - y_0}{V_0 \cos\alpha}$$

$$\boxed{z = -\frac{1}{2}\, g \left(\frac{y - y_0}{V_0 \cos\alpha}\right)^2 + (y - y_0) \tan\alpha + z_0}$$

Pour que la trajectoire décrite par cette courbe passe par le point $(0, y_1, z_1)$, il faut que :

$$z_1 = -\frac{1}{2}\, g \left(\frac{y_1 - y_0}{V_0 \cos\alpha}\right)^2 + (y_1 - y_0) \tan\alpha + z_0$$

D'où V_0 en fonction des autres paramètres :

$$\boxed{V_0 = \frac{(y_1 - y_0)\sqrt{2\,g}}{2 \cos\alpha \sqrt{(y_1 - y_0)\tan\alpha - z_1 + z_0)}}}$$

La durée du vol t_{vol} est donnée par l'expression de t en fonction de y déjà vue, appliquée à $y = y_1$.

$$t_{vol} = \frac{y_1 - y_0}{V_0 \cos\alpha}$$

$$\boxed{t_{vol} = \sqrt{(y_1 - y_0)\tan\alpha - z_1 + z_0}\,\sqrt{\frac{2}{g}}}$$

La distance D découle de la variation de la coordonné x de la balle en fonction du temps.
La balle accompagne la voiture dans la direction x le long de la route, le temps de vol de la balle est donc le même que le temps t_1 mentionné dans l'énoncé.

$$x = -V_V\ t + D$$

$$0 = -V_V\ t_{vol} + D$$

$$\boxed{D = V_V \sqrt{(y_1 - y_0)\tan\alpha - z_1 + z_0}\sqrt{\frac{2}{g}}}$$

Pour qu'une solution V_0 existe, il faut que la racine carrée qui apparaît dans la formule existe, donc que :

$$(y_1 - y_0)\tan\alpha - (z_1 - z_0) \geq 0$$

y_1 étant fixé, l'altitude maximale d'un point accessible, z_{1Max}, est la valeur qui annule cette expression.

$$\boxed{z_{1Max} = z_0 + (y_1 - y_0)\tan\alpha}$$

Si z_1 tend vers z_{1Max}, le dénominateur du rapport qui donne V_0 tend vers 0.
Il faudrait donc que la vitesse de lancement V_0 tende vers l'infini pour que le point $(0, y_1, z_{1Max})$ soit approché, au bout d'une trajectoire parabolique qui tendrait vers une droite.

Application numérique :

$$\boxed{\begin{array}{ll} V_0 = 11{,}4\ m/s & t_{vol} = 1{,}24\ s \\ D = 10{,}3\ m & z_{1Max} = 11{,}5\ m \end{array}}$$

4 - Marianne observe sa balle en vol

La balle de Marianne est une sphère homogène.
Elle possède une masse M et un moment d'inertie I par rapport à un axe quelconque passant par son centre de gravité (la symétrie de la balle sphérique homogène implique que tous les axes passant par son centre sont équivalents).
L'espace est muni d'un repère fixe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, dans lequel un point possède les coordonnées x, y et z.
Le centre de gravité G de la balle décrit une trajectoire définie par l'évolution de ses coordonnées fonction du temps t.

$$\begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = V_1\ t \\ z_G = k\ t^2 + V_2\ t \end{cases}$$

D'autre part, une rotation de la balle est définie par un vecteur $\vec{\Omega}$, de module ω, porté par un axe contenu dans le plan $(G, \vec{i}, \vec{k})$ et faisant un angle $\beta = (\vec{i}, \vec{\Omega})$ avec le vecteur $\vec{i}$.

Exprimer, dans le repère fixe, en fonction du temps t et des paramètres $M, I, V_1, V_2, k, \omega$ et β :

- Le torseur cinématique de la balle en G,
- Le torseur cinétique de la balle en G,
- Son énergie cinétique.

Exprimer également, en fonction des mêmes paramètres, ainsi que de R, le rayon de la balle, les torseurs cinématique et cinétique en un point P de la surface de la balle défini par : $\overrightarrow{GP} = R\,\vec{j}$.

4 - Corrigé

La résultante du torseur cinématique est le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ du solide.
Le moment résultant au point G est sa vitesse, dont les composantes sont obtenues par dérivation, par rapport au temps, des équations de sa trajectoire.

$$\boxed{\{V\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega} \\ \overrightarrow{V_G} \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega\cos\beta \\ 0 \\ \omega\sin\beta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{V_G} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_1 \\ 2\,k\,t + V_2 \end{pmatrix}}$$

La résultante du torseur cinétique, ou somme cinétique, s'exprime en fonction de la masse M et de la vitesse $\overrightarrow{V_G}$ du centre d'inertie G.

$$\overrightarrow{Sc} = M\,\overrightarrow{V_G}$$

Le moment cinétique au barycentre G choisi comme origine du repère lié au solide s'exprime en fonction du vecteur rotation $\vec{\Omega}$ et de son opérateur d'inertie en G, $\overline{\overline{I_G}}$.

$$\overrightarrow{\sigma_G} = \overline{\overline{I_G}}\,\vec{\Omega}$$

Compte tenu de la symétrie d'une sphère, tous les axes passant par son centre sont des axes principaux d'inertie.

$$\overline{\overline{I_G}} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{I_G}}\,\vec{\Omega} = I\,\vec{\Omega}$$

$$\boxed{\{C\}_G = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{S_C} \\ \overrightarrow{\sigma_G} \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{S_C} = \begin{pmatrix} 0 \\ M\,V_1 \\ M\,(2\,k\,t + V_2) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\sigma_G} = \begin{pmatrix} I\,\omega\cos\beta \\ 0 \\ I\,\omega\sin\beta \end{pmatrix}}$$

L'énergie cinétique de la balle peut être calculée en fonction du comoment de ces 2 torseurs, exprimé au point G.

$$E_C = \frac{1}{2}\{C\}.\{V\}$$

$$E_C = \frac{1}{2}(\overrightarrow{S_C}.\overrightarrow{V_G} + \vec{\Omega}.\overrightarrow{\sigma_G})$$

$$E_C = \frac{1}{2}\left(M\,\overrightarrow{V_G}^{\,2} + I\,\overrightarrow{\Omega}^{\,2} \right)$$

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2}\left[M\,(V_1^2 + (2\,k + V_2)^2) + I\,\omega^2 \right]}$$

Le vecteur vitesse en P, moment résultant du torseur cinématique, est déduit de la propriété générale des moments des torseurs.

$$\overrightarrow{V_P} = \overrightarrow{V_G} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{GP}$$

$$\overrightarrow{V_P} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_1 \\ 2\,k\,t + V_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega\cos\beta \\ 0 \\ \omega\sin\beta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\{ V \}_P = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega} \\ \overrightarrow{V_P} \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega\cos\beta \\ 0 \\ \omega\sin\beta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{V_P} = \begin{pmatrix} -R\,\omega\sin\beta \\ V_1 \\ 2\,k\,t + V_2 + R\,\omega\cos\beta \end{pmatrix}}$$

De même pour le moment cinétique.

$$\overrightarrow{\sigma_P} = \overrightarrow{\sigma_G} + \overrightarrow{S_C} \wedge \overrightarrow{GP}$$

$$\overrightarrow{\sigma_P} = \begin{pmatrix} I\,\omega\cos\beta \\ 0 \\ I\,\omega\sin\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ M\,V_1 \\ M\,(2\,k\,t + V_2) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\{ C \}_P = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{S_C} \\ \overrightarrow{\sigma_P} \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{S_C} = \begin{pmatrix} 0 \\ M\,V_1 \\ M\,(2\,k\,t + V_2) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\sigma_P} = \begin{pmatrix} I\,\omega\cos\beta - M\,R\,(2\,k\,t + V_2) \\ 0 \\ I\,\omega\sin\beta \end{pmatrix}}$$

On peut vérifier sur cet exemple l'invariance du comoment, qui fait que le calcul de l'énergie cinétique de la balle à partir des éléments de réduction des 2 torseurs ne dépend pas du point de calcul.

5 - Marianne connaît des moments d'inertie

La balle de Marianne est une sphère pleine et homogène, de rayon R, de masse M et de masse volumique ρ.

Calculer son moment d'inertie I_G par rapport à son centre géométrique G.

Pour cela, on pourra considérer la balle comme un emboîtement d'une série de sphères creuses, d'épaisseur élémentaire dr, et calculer le moment d'inertie de chacune de ces sphères en faisant intervenir l'angle solide sous lequel est vue une telle sphère depuis son centre (il n'est pas demandé de redémontrer que cet angle solide vaut 4π).

Utiliser les propriétés de symétrie d'une sphère pour en déduire simplement le moment d'inertie I_P de la balle par rapport à un plan contenant son centre.

En déduire ensuite le moment d'inertie I_{AG} de la balle par rapport à un axe contenant son centre.
Exprimer ces 3 moments d'inertie en fonction de la masse M et du rayon R de la balle.
Calculer le moment d'inertie I_{AT} de la balle par rapport à un axe tangent à sa surface.
Calculer l'énergie cinétique d'une balle qui roule sans glisser le long d'une ligne droite, sur un plan, en fonction uniquement de la vitesse V_G de son centre de gravité et de sa masse M.

Marianne lance sa balle en ligne droite sur une patinoire.
En l'absence de frottement, elle glisse sans rouler avec une vitesse V_0.
Sortant de la surface glacée, elle se met brusquement à rouler sans glisser.
En supposant que la perte d'énergie lors de cette transition est négligeable par rapport à l'énergie cinétique initiale de la balle, de combien sa vitesse va-t-elle diminuer, en % ?

5 - Corrigé

Moment d'inertie, par rapport à son centre, d'une sphère creuse de rayon r et d'épaisseur dr, ensemble de points équidistants du centre.

$$di = r^2\ dm$$

$$di = r^2\ \rho\ 4\pi\ r^2\ dr$$

Le moment d'inertie de la sphère pleine par rapport à son centre est obtenu par intégration de 0 à R.

$$I_G = 4\pi\ \rho \int_0^R r^4 dr$$

$$I_G = \frac{4}{5}\pi\ \rho\ R^5$$

Un calcul analogue permet de retrouver le volume V de la sphère.

$$V = \frac{4}{3}\pi\ R^3$$

$$\boxed{I_G = \frac{3}{5} M R^2}$$

Le moment d'inertie par rapport à un plan contenant G s'en déduit compte tenu de la symétrie de la sphère, où les 3 axes d'un repère centré en G sont équivalents.

$$I_G = \iiint_S \rho\left(x^2 + y^2 + z^2\right) dv$$

$$I_P = \iiint_S \rho\ x^2 dv$$

$$I_P = \frac{1}{3} I_G$$

$$\boxed{I_P = \frac{1}{5} M R^2}$$

Le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque passant par G s'en déduit pour la même raison.

$$I_{AG} = \iiint_S \rho \left(x^2 + y^2\right) dv$$

$$I_{AG} = 2\, I_P$$

$$\boxed{I_{AG} = \frac{2}{5} M R^2}$$

Le moment d'inertie par rapport à un axe tangent à la surface de la sphère est fourni par le théorème de Huyghens.

$$I_{AT} = I_{AG} + M R^2$$

$$\boxed{I_{AT} = \frac{7}{5} M R^2}$$

En cas de roulement sans glissement, la vitesse V_G de l'axe de rotation et la vitesse de rotation ω sont liées.

$$V_G = R\, \omega$$

D'où l'expression de l'énergie cinétique.

$$E_C = \frac{1}{2}(M V_G^2 + I_{AG}\omega^2)$$

$$E_C = \frac{1}{2}\left(M V_G^2 + \frac{2}{5} M R^2 \frac{V_G^2}{R^2}\right)$$

$$\boxed{E_C = \frac{7}{10} M V_G^2}$$

Sur la patinoire, la balle a une vitesse de translation V_0 et aucune vitesse de rotation.

Son énergie cinétique vaut :

$$E_C = \frac{1}{2} M V_0^2$$

Quand elle roule sans glisser, se déplaçant à une vitesse V_G, elle conserve la même énergie cinétique totale.

$$\frac{7}{10} M V_G^2 = \frac{1}{2} M V_0^2$$

D'où le rapport des vitesses et la perte de vitesse p.

$$\frac{V_G}{V_0} = \sqrt{\frac{5}{7}}$$

$$p = 1 - \frac{V_G}{V_0}$$

$$\boxed{p = 15{,}5\ \%}$$