

3 exercices indépendants - Durée : 2 h - Documents autorisés

1. Neil l'astronaute jette des pierres de lune.

Neil est debout sur un point O , origine d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, dans lequel un point possède les coordonnées x, y et z .

Nous sommes sur la lune, dans le vide, et soumis à un champ de pesanteur uniforme, dont l'accélération est $\vec{G} = -g \vec{k}$.

Les pierres sont considérées comme des points matériels pesants.



[1]

A l'instant $t = 0$, Neil lance une pierre de masse m au point (y_0, z_0) avec une vitesse initiale \vec{V}_0 , de module V_0 , incluse dans le plan (\vec{j}, \vec{k}) et faisant un angle $\alpha = (\vec{j}, \vec{V}_0)$ positif avec le vecteur \vec{j} .

1.1. Ecrire les équations décrivant la trajectoire de la pierre sous la forme : $\begin{cases} y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

Comment s'appelle la courbe décrite par la pierre ?

1.2. Au bout de quel temps t_m la pierre atteint-elle son altitude maximale z_{\max} ?
Quelle est la valeur de cette altitude ?

1.3. Au bout de quel temps t_1 la pierre retombe-t-elle sur le sol (plan $z = 0$) ?
A quelle distance D des pieds de Neil la pierre retombe-elle sur le sol ?
Quelle est à ce moment-là sa vitesse \vec{V}_1 (module et angle α_1 avec le vecteur \vec{j}) ?

1.4. Déçu par la distance parcourue, Neil lance une nouvelle pierre de masse $2m$ au même point et avec la même vitesse initiale.
De combien la distance parcourue par cette nouvelle pierre augmente-t-elle par rapport à la précédente ?

1.5. Tous ces résultats seront exprimés littéralement, puis calculés pour les valeurs numériques suivantes :

- | | | |
|----------------------------|--------------------------|--------------------------|
| ➤ $g = 1,62 \text{ m/s}^2$ | ➤ $y_0 = 0$ | ➤ $V_0 = 10 \text{ m/s}$ |
| ➤ $m = 500 \text{ g}$ | ➤ $z_0 = 2,10 \text{ m}$ | ➤ $\alpha = 30^\circ$ |

[2 (Consulter "Lune")]

2. Traction du papier.

Franck Medlege de l'EFPG (Ecole Française de Papeterie et des industries Graphiques, à Grenoble) a récemment publié un article intitulé « Ondulation du papier imprimé sur rotative offset avec sécheur ». Il a étudié 5 papiers commerciaux, qui ont été caractérisés physiquement (grammage, épaisseur, ...) et mécaniquement (essais en traction, ...) [3].

Pour tous ces papiers, les grandeurs suivantes ont été mesurées :

- Le grammage G , qui est la masse par unité de surface d'une feuille de papier.
- L'épaisseur e de la feuille.
- La force F_R nécessaire pour rompre une bande de papier de largeur a .
- L'allongement relatif à la rupture ϵ_R .
- Le module d'Young en traction E .

2.1. Exprimer la contrainte normale σ_1 dans une section de la bande de papier en fonction de l'effort de traction F appliqué et de ses dimensions.

On notera σ_R la contrainte correspondant à l'effort F_R .

2.2. Tracer schématiquement la courbe des contraintes en fonction des déformations en faisant apparaître les éléments connus donnés ci-dessus.

Une caractéristique couramment utilisée dans l'industrie papetière est la « Longueur de rupture » : c'est la longueur limite au-delà de laquelle une bande de papier suspendue se rompt sous son propre poids [4].

La démarche décrite ci-dessous permet d'établir la formule qui donne cette longueur de rupture L_R en fonction des valeurs de G , a , F_R (paramètres cités ci-dessus) et de l'attraction de la pesanteur terrestre g .

La bande de papier est vue comme une poutre de longueur L_0 et de section $e \times a$, suspendue par une de ses extrémités et soumise uniquement à son propre poids.

2.3. Exprimer la masse volumique ρ du papier en fonction du grammage G et de l'épaisseur e de la feuille.

En déduire le poids P d'une longueur L quelconque de la bande de papier.

2.4. La bande étant orientée du haut vers le bas par un axe Ox (O est le point d'accrochage), déterminer les composantes du torseur des efforts exercés par l'aval sur l'amont d'une section.

2.5. Quelle est la nature de la contrainte qui apparaît dans une section ?

Quelle est son expression en fonction des caractéristiques de la bande de papier ?

2.6. Quelle est la longueur de papier L_R en aval d'une section qui génère dans cette section une contrainte égale à σ_R ?

Cette longueur est justement la longueur de rupture définie ci-dessus.

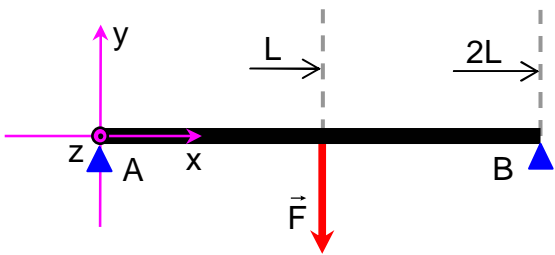
2.7. Une bande de papier est déroulée, par temps calme, sur toute la hauteur H de la tour Montparnasse.

Calculer la longueur $U(H)$ dont elle s'allongera sous l'effet de son poids propre, en supposant que ses déformations restent dans le domaine élastique.

2.8. Tous ces résultats seront exprimés littéralement, puis calculés pour les valeurs numériques suivantes :

- | | | |
|----------------------------|--------------------------|-----------------------------|
| ➤ $G = 58,3 \text{ g/m}^2$ | ➤ $F_R = 6,24 \text{ N}$ | ➤ $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ |
| ➤ $e = 47,3 \mu\text{m}$ | ➤ $\epsilon_R = 1,32 \%$ | ➤ $H = 210 \text{ m}$ [5] |
| ➤ $a = 15 \text{ mm}$ | ➤ $E = 1,19 \text{ GPa}$ | |

3. Flexion 3 points d'une éprouvette.



Conformément au croquis ci-contre une éprouvette de longueur $2L$ et de section rectangulaire est soumise à un test de flexion 3 points.

Ses 2 extrémités A et B sont posées sur des appuis simples et un effort \vec{F} est appliqué transversalement en son centre.

L'éprouvette est considérée comme une poutre droite orientée (repère représenté sur le croquis).

- 3.1. Quelles sont les valeurs, en chaque section x de l'éprouvette, des composantes du torseur des efforts exercés par l'aval sur l'amont ?
Quelle est la nature des composantes non nulles ?
Tracer sur un graphique l'allure de leurs évolutions.
En quel point le moment fléchissant $M_z(x)$ est-il maximum et quelle est la valeur M_{zmax} de ce maximum ?

- 3.2. La section de l'éprouvette est rectangulaire, de largeur b (dans la direction Az) et d'épaisseur e (dans la direction Ay).
Calculer son moment d'inertie I_z par rapport à son axe principal parallèle à l'axe Az .

- 3.3. Dans la section où le moment fléchissant est maximum, quel type de contrainte génère-t-il et comment cette contrainte varie-t-elle en fonction de y et z ?
Quelle est la valeur maximale de cette contrainte et en quel(s) point(s) de la section est-elle atteinte ?

- 3.4. Soumise à la force \vec{F} , l'éprouvette se déforme.
Calculer les rotations $\omega_z(x)$ de ses sections et leurs déplacements transversaux $V_y(x)$ dus au moment fléchissant.
Suggestions : compte tenu de la symétrie du système par rapport au plan $x = L$, il suffira d'étudier le tronçon $0 \leq x \leq L$; la rotation $\omega_z(0)$ de l'extrémité A sera d'abord considérée comme une inconnue, puis identifiée compte tenu de la valeur particulière que doit avoir la rotation au centre $\omega_z(L)$.
En quel point le déplacement $V_y(x)$ est-il maximum (en valeur absolue) ?

- 3.5. La rigidité K de l'éprouvette en flexion est définie comme le rapport de l'effort appliqué au déplacement induit de son point d'application : $K = \frac{-F}{V_y(L)}$

Exprimer cette rigidité en fonction des dimensions de l'éprouvette et de son module d'Young.

Soient l'aire de la section $S = eb$ et le rapport de son épaisseur à sa largeur $k = \frac{e}{b}$.

Exprimer la rigidité K en fonction de ces 2 nouveaux paramètres S et k , de la longueur L de l'éprouvette et de son module d'Young E .

Comment la rigidité K varie-t-elle en fonction du rapport k ?

Cas particulier : k passe de 0,5 à 2 (ce qui peut correspondre à une éprouvette unique qu'on tourne de 90° autour de son axe), par combien la rigidité K est-elle multipliée ?

- 3.6. Tous les résultats seront exprimés littéralement, puis calculés pour les valeurs numériques suivantes :

➤ $L = 50 \text{ mm}$

➤ $b = 15 \text{ mm}$

➤ $E = 70 \text{ GPa}$

➤ $e = 3 \text{ mm}$

➤ $F = 100 \text{ N}$

Références :

[1] - Les illustrations de Pierre Bon

Quelques illustrations d'astronomie et de conquête de l'espace ...

<http://www.pierre-bon.com/DP%2005.htm>

[2] - Wikipédia

Bienvenue sur Wikipédia, l'encyclopédie libre et gratuite que chacun peut améliorer.

<http://fr.wikipedia.org/>

[3] - Ondulation du papier imprimé sur rotative offset avec sécheur

Franck Medlege - EFGP (01 avril 2005) - III - Caractérisation des papiers

<http://cerig.efgp.inpg.fr/dossier/ondulations-papier/page03.htm>

[4] - Définitions du lexique Papeterie Clairefontaine

Longueur de rupture : C'est la longueur limite ...

<http://www.clairalfa.tm.fr/france/entreprise/lexique/definitions.asp>

[5] - Montparnasse 56, toit-terrasse et salon panoramique, la plus belle vue sur Paris

Du haut de ses 210 mètres, la tour Montparnasse surplombe Paris.

<http://www.tourmontparnasse56.com/fr/vue/terrasse.html>

Éléments de réponses

Question 1.1

Equations définissant la trajectoire de la pierre dans le plan $x = 0$:

$$\begin{cases} y = V_0 t \cos \alpha + y_0 \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 t \sin \alpha + z_0 \end{cases}$$

La courbe décrite par un projectile dans un champ de pesanteur uniforme est une parabole.

Question 1.2

L'altitude z est maximale à l'instant t_m où sa dérivée par rapport au temps s'annule.

$$\frac{dz}{dt} = 0$$

$$-g t_m + V_0 \sin \alpha = 0$$

$$t_m = \frac{V_0 \sin \alpha}{g}$$

L'altitude maximale atteinte z_{Max} s'obtient en reportant cette valeur dans l'expression de z .

$$z_{\text{Max}} = -\frac{1}{2}g \left(\frac{V_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 + V_0 \left(\frac{V_0 \sin \alpha}{g} \right) \sin \alpha + z_0$$

$$z_{\text{Max}} = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} + z_0$$

Question 1.3

La pierre retombe sur le sol au bout d'un temps t_1 tel que :

$$-\frac{1}{2}g t_1^2 + V_0 t_1 \sin \alpha + z_0 = 0$$

C'est une équation du second degré qui a 2 solutions.

La plus petite des 2 correspond à l'intersection de la parabole avec le sol derrière Neil, où la pierre n'était pas encore sur sa trajectoire.

On ne doit donc retenir que la plus grande des racines.

$$t_1 = \frac{V_0}{g} \left(\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{2g z_0}{V_0^2}} \right)$$

Distance parcourue : $D = y(t_1) - y_0$

$$D = \frac{V_0^2 \cos \alpha}{g} \left(\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{2g z_0}{V_0^2}} \right)$$

Composantes de la vitesse dans le cas général :

$$\begin{cases} V_y = V_0 \cos \alpha \\ V_z = V_0 \sin \alpha - g t \end{cases}$$

A l'instant t_1 , en tenant compte de la valeur de t_1 calculée précédemment :

$$\begin{cases} V_{1y} = V_0 \cos \alpha \\ V_{1z} = -\sqrt{V_0^2 \sin^2 \alpha + 2g z_0} \end{cases}$$

$$V_1 = \sqrt{V_{1y}^2 + V_{1z}^2}$$

$$V_1 = V_0 \sqrt{1 + \frac{2g z_0}{V_0^2}}$$

$$\text{tg } \alpha_1 = \frac{V_{1z}}{V_{1y}}$$

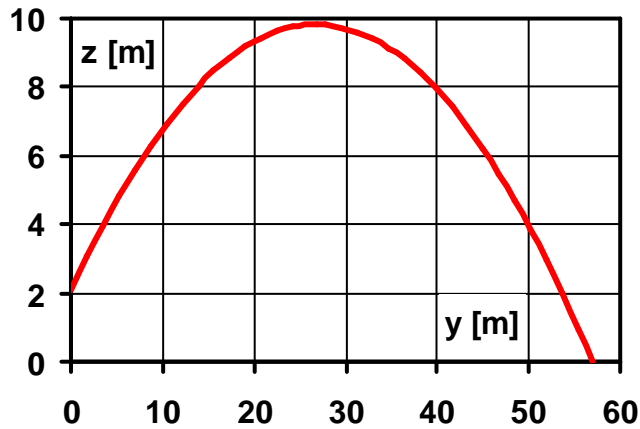
$$\alpha_1 = -\text{Arctg} \left(\text{tg } \alpha \sqrt{1 + \frac{2g z_0}{V_0^2 \sin^2 \alpha}} \right)$$

Question 1.4

La trajectoire d'une pierre ne dépend pas de sa masse.

Question 1.5

Application numérique :



$t_m = 3,09 \text{ s}$	$t_1 = 6,57 \text{ s}$	$V_1 = 10,3 \text{ m/s}$
$z_{\text{Max}} = 9,82 \text{ m}$	$D = 56,9 \text{ m}$	$\alpha_1 = -33,1^\circ$

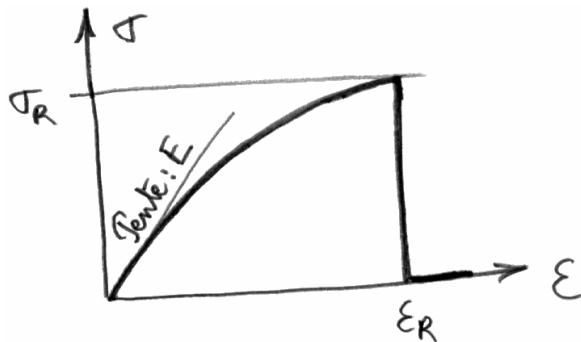
Question 2.1

La contrainte de traction est égale à la force divisée par la section.

$$\sigma = \frac{F}{a e}$$

$$\sigma_R = \frac{F_R}{a e}$$

Question 2.2



Question 2.3

Masse volumique = Masse par unité de surface / Epaisseur

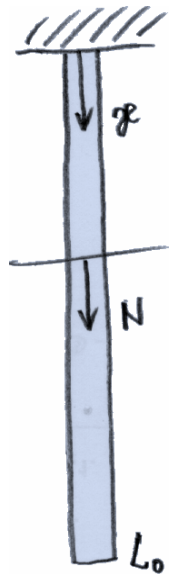
$$\rho = \frac{G}{e}$$

Poids = Masse volumique x Volume x Accélération de la pesanteur

$$P = \rho e a L g$$

$$P = G a L g$$

Question 2.4



En une section x , le torseur des efforts exercés par l'aval sur l'amont n'a qu'une composante non-nulle : un effort normal correspondant au poids de la partie de la bande de papier situé en aval de la section.

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad N = G a g (L_0 - x)$$

Question 2.5

La contrainte σ qui apparaît dans la section est une contrainte normale.

$$\sigma = \frac{N}{e a}$$

Ou, en remplaçant N par son expression :

$$\sigma = \frac{G g}{e} (L_0 - x)$$

Question 2.6

La longueur en aval d'une section x est égale à la longueur de rupture lorsque la contrainte de traction dans cette section est égale à la contrainte de rupture.

$$L - x = L_R \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = \sigma_R$$

L'équation obtenue à la question 2.5 devient : $\sigma_R = \frac{G g}{e} L_R$

$$\text{D'où : } L_R = \frac{e \sigma_R}{G g}$$

En remplaçant σ_R par sa valeur en fonction de F_R :

$$L_R = \frac{F_R}{G a g}$$

Question 2.7

Rappel de la formule du cours (formule de Bresse dans le cas d'un effort normal) :

$$U(G) = U(G_0) + \int_{x_0}^x \frac{N(\xi)}{E S} d\xi$$

Application à cet exercice :

$$U(H) = \int_0^H \frac{G a g (H - \xi)}{E a e} d\xi$$

$$U(H) = \frac{G g H^2}{2 e E}$$

Question 2.8

Application numérique :

$\sigma_R = 8,79 \text{ MPa}$	$L_R = 727 \text{ m}$
$\rho = 1,23 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$	$U(H) = 224 \text{ mm}$

Question 3.1

La poutre est soumise à 3 efforts parallèles, qui s'équilibrent, dans la direction y :

-F au centre et $+\frac{F}{2}$ à chaque extrémité.

Elle doit être divisée en 2 tronçons à examiner successivement.

Tronçon 1 : $0 \leq x \leq L$

$$M_z = (2L - x) \frac{F}{2} - (L - x) F$$

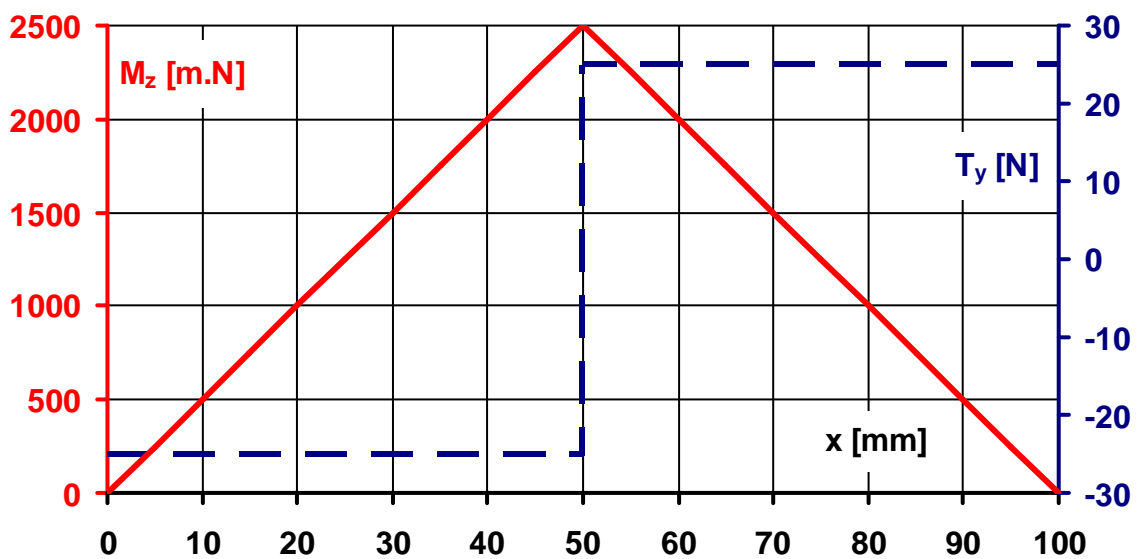
$$\{ T \} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{F}{2} & 0 \\ 0 & \frac{F}{2} x \end{Bmatrix}$$

Tronçon 2 : $L \leq x \leq 2L$

$$M_z = (2L - x) \frac{F}{2}$$

$$\{ T \} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{F}{2} & 0 \\ 0 & \frac{F}{2} (2L - x) \end{Bmatrix}$$

Graphique obtenu avec les valeurs de l'application numérique de la question 3.6 :



Le moment fléchissant est maximum au centre, en $x = L$, et vaut :

$$M_{z_{\max}} = \frac{FL}{2}$$

Question 3.2

Définition du moment d'inertie d'une section par rapport à son axe principal z.

$$I_z = \iint_S y^2 dS$$

Dans le cas d'une section rectangulaire, l'axe principal z est l'axe de symétrie.

$$I_z = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} y^2 dy dz$$

$$I_z = \frac{b e^3}{12}$$

Question 3.3

Le moment fléchissant M_z génère des contraintes normales n_1 dans la section de poutre. Ces contraintes ne dépendent pas de z et sont proportionnelles à y.

$$n_1 = -\frac{M_z y}{I_z}$$

En particulier, dans la section centrale de l'éprouvette :

$$n_1 = -\frac{M_{z\max} y}{I_z}$$

La valeur maximale de cette contrainte est atteinte pour $y = -\frac{e}{2}$, c'est à dire sur la surface de l'éprouvette, le long de la ligne transversale opposée à la ligne d'application de l'effort.

Remarque : cette zone est en traction alors que la zone opposée, où l'effort est appliqué, subit une compression (contrainte de même valeur absolue, mais négative).

$$n_{1\max} = \frac{M_{z\max} e}{2 I_z}$$

$$n_{1\max} = \frac{3 F L}{b e^2}$$

Question 3.4

Equation différentielle de la déformée.

$$\frac{d^2 V_y(x)}{dx^2} = \frac{M_z}{E I_z}$$

Pour les sections du premier tronçon $0 \leq x \leq L$:

$$\frac{d^2 V_y(x)}{dx^2} = \frac{F}{2 E I_z} x$$

1^{ère} intégration, en fonction de la rotation à l'origine $\omega_z(0)$, qui n'est pas connue à ce stade.

$$\frac{dV_y(x)}{dx} = \omega_z(x) = \omega_z(0) + \frac{F}{4 E I_z} x^2$$

2^{ème} intégration, sachant que le déplacement à l'origine $V_y(0)$ est nul, à cause de l'appui.

$$V_y(x) = \omega_z(0) x + \frac{F}{12 E I_z} x^3$$

Pour identifier $\omega_z(0)$, il faut remarquer que la symétrie impose que la pente de la poutre déformée (ou rotation de la section) soit nulle au centre, en $x = L$.

$$\omega_z(L) = 0 = \omega_z(0) + \frac{F}{4 E I_z} L^2$$

D'où la valeur de $\omega_z(0)$, qui permet d'exprimer complètement $\omega_z(x)$ et $V_y(x)$.

$$\omega_z(0) = -\frac{F L^2}{4 E I_z}$$

$$\omega_z(x) = -\frac{F}{4 E I_z} (L^2 - x^2)$$

$$V_y(x) = -\frac{F}{12 E I_z} x (3 L^2 - x^2)$$

Le déplacement est maximum au centre, en $x = L$ (sa dérivée y est nulle).

$$V_y(L) = -\frac{F L^3}{6 E I_z}$$

ou

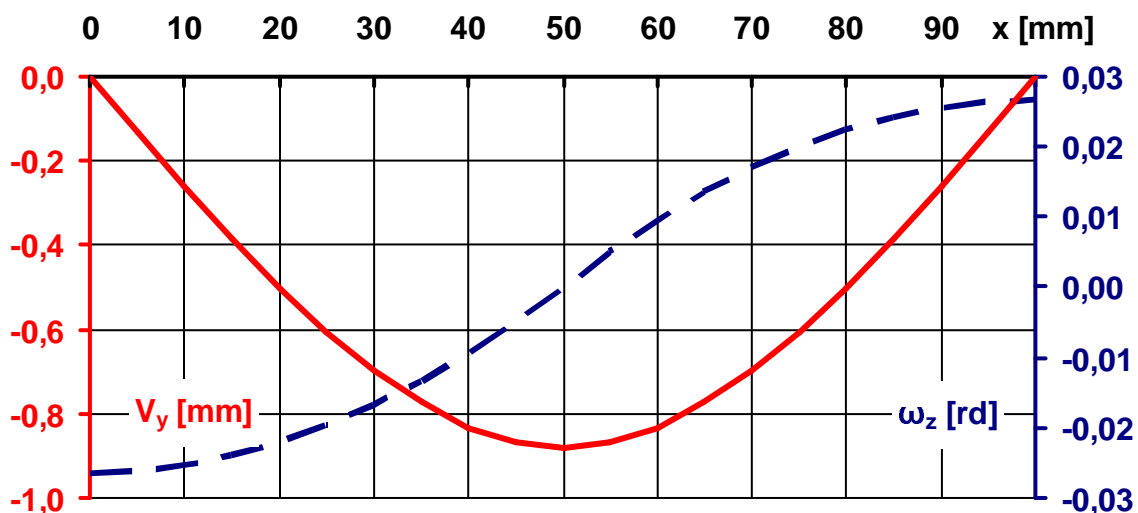
$$V_y(L) = -\frac{2 F L^3}{E b e^3}$$

Remarques :

- Une autre méthode, plus compliquée, aurait consisté à étudier la déformée du 2^{ème} tronçon $L \leq x \leq 2L$ en tenant compte de $\omega_z(L)$ et $V_y(L)$, et en conservant $\omega_z(0)$ comme inconnue, puis de l'identifier grâce à la condition d'appui $V_y(2L) = 0$.
- Le long de ce 2^{ème} tronçon, les rotations et déplacements ont les expressions suivantes (qui n'étaient pas demandées par l'énoncé de l'exercice, mais permettent de tracer la courbe complète) :

$$\omega_z(x) = \frac{F}{4 E I_z} (-3 L^2 + 4 L x - x^2)$$

$$V_y(x) = -\frac{F}{12 E I_z} (-2 L^3 + 9 L^2 x - 6 L x^2 + x^3)$$



Question 3.5

Compte tenu de la définition de K et de la valeur de $V_y(L)$ trouvée à la question 3.4 :

$$K = -\frac{E b e^3}{2L^3}$$

b et e peuvent être remplacés par S et k.

$$\begin{cases} S = e b \\ k = \frac{e}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = \sqrt{S k} \\ b = \sqrt{\frac{S}{k}} \end{cases}$$

$$K = -\frac{E S^2 k}{2L^3}$$

La rigidité K est proportionnelle au rapport k des côtés de la section rectangulaire.

Si k passe de 0,5 à 2 (rotation d'une éprouvette dont l'un des côtés est le double de l'autre), la rigidité K est multipliée par 4.

Question 3.6

Application numérique :

$M_{z_{\max}} = 2,50 \text{ Nm}$	$n_{1_{\max}} = 111 \text{ MPa}$	$K = 113 \text{ N/mm}$
$I_z = 33,8 \text{ mm}^4$	$V_y(L) = 0,882 \text{ mm}$	