

3 exercices indépendants - Durée : 2 h - Documents autorisés

1. Neil l'astronaute jette des pierres de lune.



Neil est debout sur un point O, origine d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, dans lequel un point possède les coordonnées x, y et z .

Nous sommes sur la lune, dans le vide, et soumis à un champ de pesanteur uniforme, dont l'accélération est $\vec{G} = -g \vec{k}$.

Les pierres sont considérées comme des points matériels pesants.

A l'instant $t=0$, Neil lance une pierre de masse m au point (y_0, z_0) avec une vitesse initiale \vec{V}_0 , de module V_0 , incluse dans le plan

(\vec{j}, \vec{k}) et faisant un angle $\alpha = (\vec{j}, \vec{V}_0)$ positif avec le vecteur \vec{j} .

- 1.1. Ecrire les équations décrivant la trajectoire de la pierre sous la forme : $\begin{cases} y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

Comment s'appelle la courbe décrite par la pierre ?

- 1.2. Au bout de quel temps t_m la pierre atteint-elle son altitude maximale z_{\max} ?
Quelle est la valeur de cette altitude ?

- 1.3. Au bout de quel temps t_1 la pierre retombe-t-elle sur le sol (plan $z = 0$) ?
A quelle distance D des pieds de Neil la pierre retombe-t-elle sur le sol ?
Quelle est à ce moment-là sa vitesse \vec{V}_1 (module et angle α_1 avec le vecteur \vec{j}) ?

- 1.4. Déçu par la distance parcourue, Neil lance une nouvelle pierre de masse $2m$ au même point et avec la même vitesse initiale.
De combien la distance parcourue par cette nouvelle pierre augmente-t-elle par rapport à la précédente ?

- 1.5. Tous ces résultats seront exprimés littéralement, puis calculés pour les valeurs numériques suivantes :

- | | | |
|----------------------------|--------------------------|--------------------------|
| ➤ $g = 1,62 \text{ m/s}^2$ | ➤ $y_0 = 0$ | ➤ $V_0 = 10 \text{ m/s}$ |
| ➤ $m = 500 \text{ g}$ | ➤ $z_0 = 2,10 \text{ m}$ | ➤ $\alpha = 30^\circ$ |

2. Traction du papier.

Franck Medlege de l'EFPG (Ecole Française de Papeterie et des industries Graphiques, à Grenoble) a récemment publié un article intitulé « Ondulation du papier imprimé sur rotative offset avec sécheur ». Il a étudié 5 papiers commerciaux, qui ont été caractérisés physiquement (grammage, épaisseur, ...) et mécaniquement (essais en traction, ...).

Pour tous ces papiers, les grandeurs suivantes ont été mesurées :

- Le grammage G , qui est la masse par unité de surface d'une feuille de papier.
- L'épaisseur e de la feuille.
- La force F_R nécessaire pour rompre une bande de papier de largeur a .
- L'allongement relatif à la rupture ϵ_R .
- Le module d'Young en traction E .

2.1. Exprimer la contrainte normale σ dans une section de la bande de papier en fonction de l'effort de traction F appliqué et de ses dimensions.

On notera σ_R la contrainte correspondant à l'effort F_R .

2.2. Tracer schématiquement la courbe des contraintes en fonction des déformations en faisant apparaître les éléments connus donnés ci-dessus.

Une caractéristique couramment utilisée dans l'industrie papetière est la « Longueur de rupture » : c'est la longueur limite au-delà de laquelle une bande de papier suspendue se rompt sous son propre poids.

La démarche décrite ci-dessous permet d'établir la formule qui donne cette longueur de rupture L_R en fonction des valeurs de G , a , F_R (paramètres cités ci-dessus) et de l'accélération de la pesanteur terrestre g .

La bande de papier est vue comme une poutre de longueur L_0 et de section $e \times a$, suspendue par une de ses extrémités et soumise uniquement à son propre poids.

2.3. Exprimer la masse volumique ρ du papier en fonction du grammage G et de l'épaisseur e de la feuille.

En déduire le poids P d'une longueur L quelconque de la bande de papier.

2.4. La bande étant orientée du haut vers le bas par un axe Ox (O est le point d'accrochage), déterminer les composantes du torseur des efforts exercés par l'aval sur l'amont d'une section.

2.5. Quelle est la nature de la contrainte σ qui apparaît dans une section ?

Quelle est son expression en fonction des caractéristiques de la bande de papier ?

2.6. Quelle est la longueur de papier L_R en aval d'une section qui génère dans cette section une contrainte égale à σ_R ?

Cette longueur est justement la longueur de rupture définie ci-dessus.

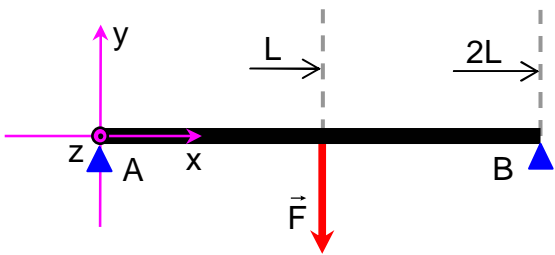
2.7. Une bande de papier est déroulée, par temps calme, sur toute la hauteur H de la tour Montparnasse.

Calculer la longueur $U(H)$ dont elle s'allongera sous l'effet de son poids propre, en supposant que ses déformations restent dans le domaine élastique.

2.8. Tous ces résultats seront exprimés littéralement, puis calculés pour les valeurs numériques suivantes :

- | | | |
|----------------------------|--------------------------|----------------------------|
| ➤ $G = 58,3 \text{ g/m}^2$ | ➤ $F_R = 6,24 \text{ N}$ | ➤ $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ |
| ➤ $e = 47,3 \mu\text{m}$ | ➤ $\epsilon_R = 1,32 \%$ | ➤ $H = 210 \text{ m}$ |
| ➤ $a = 15 \text{ mm}$ | ➤ $E = 1,19 \text{ GPa}$ | |

3. Flexion 3 points d'une éprouvette.



Conformément au croquis ci-contre une éprouvette de longueur $2L$ et de section rectangulaire est soumise à un test de flexion 3 points.

Ses 2 extrémités A et B sont posées sur des appuis simples et un effort \vec{F} est appliqué transversalement en son centre.

L'éprouvette est considérée comme une poutre droite orientée (repère représenté sur le croquis).

- 3.1. Quelles sont les valeurs, en chaque section x de l'éprouvette, des composantes du torseur des efforts exercés par l'aval sur l'amont ?
Quelle est la nature des composantes non nulles ?
Tracer sur un graphique l'allure de leurs évolutions.
En quel point le moment fléchissant $M_z(x)$ est-il maximum et quelle est la valeur M_{zmax} de ce maximum ?

- 3.2. La section de l'éprouvette est rectangulaire, de largeur b (dans la direction Az) et d'épaisseur e (dans la direction Ay).
Calculer son moment d'inertie I_z par rapport à son axe principal parallèle à l'axe Az .

- 3.3. Dans la section où le moment fléchissant est maximum, quel type de contrainte génère-t-il et comment cette contrainte varie-t-elle en fonction de y et z ?
Quelle est la valeur maximale de cette contrainte et en quel(s) point(s) de la section est-elle atteinte ?

- 3.4. Soumise à la force \vec{F} , l'éprouvette se déforme.
Calculer les rotations $\omega_z(x)$ de ses sections et leurs déplacements transversaux $V_y(x)$ dus au moment fléchissant.
Suggestions : compte tenu de la symétrie du système par rapport au plan $x = L$, il suffira d'étudier le tronçon $0 \leq x \leq L$; la rotation $\omega_z(0)$ de l'extrémité A sera d'abord considérée comme une inconnue, puis identifiée compte tenu de la valeur particulière que doit avoir la rotation au centre $\omega_z(L)$.
En quel point le déplacement $V_y(x)$ est-il maximum (en valeur absolue) ?

- 3.5. La rigidité K de l'éprouvette en flexion est définie comme le rapport de l'effort appliqué au déplacement induit de son point d'application : $K = \frac{-F}{V_y(L)}$

Exprimer cette rigidité en fonction des dimensions de l'éprouvette et de son module d'Young.

Soient l'aire de la section $S = eb$ et le rapport de son épaisseur à sa largeur $k = \frac{e}{b}$.

Exprimer la rigidité K en fonction de ces 2 nouveaux paramètres S et k , de la longueur L de l'éprouvette et de son module d'Young E .

Comment la rigidité K varie-t-elle en fonction du rapport k ?

Cas particulier : k passe de 0,5 à 2 (ce qui peut correspondre à une éprouvette unique qu'on tourne de 90° autour de son axe), par combien la rigidité K est-elle multipliée ?

- 3.6. Tous les résultats seront exprimés littéralement, puis calculés pour les valeurs numériques suivantes :

➤ $L = 50 \text{ mm}$

➤ $b = 15 \text{ mm}$

➤ $E = 70 \text{ GPa}$

➤ $e = 3 \text{ mm}$

➤ $F = 100 \text{ N}$