CP46 – Automne 2007
Corrigé de l'Examen MEDIAN
07/11/2007

3 exercices indépendants - Durée : 2 h - Documents autorisés

1. Largages.

La zone des opérations est munie d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, dans lequel un point possède les coordonnées x, y et z.
Toute masse y est soumise à un champ de pesanteur uniforme, dont l'accélération est $\vec{G} = -g\vec{k}$.
Un hélicoptère et 2 avions doivent chacun larguer un colis de masse m sur une plaine parfaitement plane et horizontale, confondue avec le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Les pilotes veulent prédire les trajectoires de leurs colis quand ils les auront largués sans vitesse initiale par rapport à leur aéronef, en les considérant comme des points pesants soumis uniquement à l'action de la pesanteur, sans tenir compte des effets de l'air.

Quand l'hélicoptère largue son colis, à l'instant t = 0, il est immobile au point (0, 0, H).

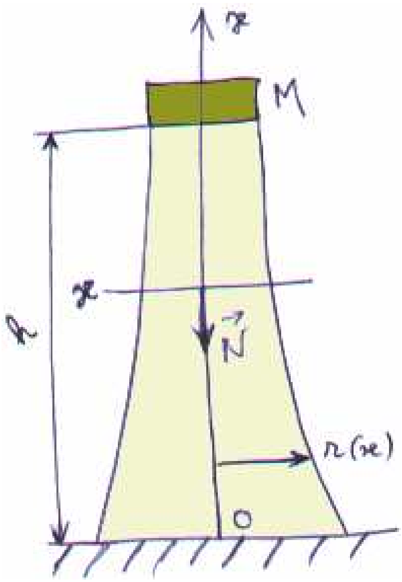
1.1. Ecrire les équations décrivant la trajectoire du colis largué par l'hélicoptère, sous la forme $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$.
1.2. Au bout de quel temps t_{m1} ce 1^{er} colis atteindra-il le sol ?

L'avion 1 largue son colis au même instant t = 0, en passant au point (A, 0, H) avec une vitesse $\vec{V_1} = V_{0X}\ \vec{i}$.

1.3. Ecrire les équations décrivant la trajectoire du colis largué par l'avion 1 sous la forme $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$.
1.4. Quelles seront les coordonnées du point de chute de ce $2^{ème}$ colis ?

L'avion 2 largue son colis au même instant t = 0, en passant au point (A, B, H) avec une vitesse $\vec{V_2} = V_{0X}\ \vec{i} + V_{0Y}\ \vec{j} + V_{0Z}\ \vec{k}$.

1.5. Ecrire les équations décrivant la trajectoire du colis largué par l'avion 2 sous la forme $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$.
1.6. Au bout de quel temps t_{m3} ce $3^{ème}$ colis atteindra-il le sol ?
1.7. Quelle sera, en fonction du temps t_{m3}, la distance entre le point de chute de ce $3^{ème}$ colis et l'origine O du repère ?



2. Poteau iso-contrainte en compression.

Un poteau vertical en béton, de masse volumique ρ, supporte une masse M.
Le but de l'exercice est de déterminer, si c'est possible, un profil tel que la contrainte normale de compression n_1 soit constante dans tout le poteau, $n_1 = - c$.
On est dans le champ de pesanteur terrestre où le poids de tout objet est un effort vertical, orienté vers le bas, proportionnel à sa masse et à l'accélération de la pesanteur g.
Le poteau est orienté par un axe Ox allant de sa base O vers son sommet où x = h.
La section du poteau est circulaire pleine, son rayon r(x) varie sur la hauteur du poteau.

2.1. Quelle doit être la surface S(h) de la section supérieure du poteau, pour que le poids de la masse M, supposée uniformément répartie, y génère la contrainte uniforme $n_1 = - c$?
2.2. Comment s'exprime la contrainte de compression n_1 dans une section quelconque, en fonction de l'effort normal N(x) et de la surface S(x) de la section ?
2.3. En déduire la variation élémentaire dN de l'effort normal en fonction d'une variation élémentaire dS de la section, lorsque n_1 a une valeur constante égale à - c.
2.4. Quel est le poids dP d'un tronçon élémentaire de poteau d'épaisseur dx ?
2.5. N étant l'effort normal en x et N + dN l'effort normal en x + dx, utiliser le résultat de la question précédente pour exprimer la variation élémentaire dN.
2.6. En rapprochant les résultats des questions 2.3 et 2.5, écrire l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire S(x).
2.7. Résoudre cette équation différentielle et donner l'expression de S(x).
2.8. Application numérique :

M =150 t　　c = 1 MPa　　$\rho = 2400\ kg/m^3$
$g = 9,81\ m/s^2$　　h = 50 m

Calculer les valeurs du rayon r(x) de la section circulaire pour x = 0 et x = h.
Tracer schématiquement l'évolution de r(x) en fonction de x, ce qui donnera une idée du profil du poteau.

3. Toto monte à l'échelle.

Toto monte sur une échelle posée contre un mur vertical (x = 0) et sur le sol horizontal (y = 0), en se tenant verticalement, sans effort sur les mains.
Jusqu'où pourra-t-il monter sans que le bas de l'échelle glisse ?

Hypothèse : le coefficient de frottement (*) échelle-mur est nul.
Données fixes : masse (uniformément répartie) et longueur de l'échelle (m_e, h), masse de Toto (m_T), accélération de la pesanteur (g), coefficient de frottement (*) échelle-sol (f).
Données variables : angle entre le sol et l'échelle (α), distance entre les pieds de Toto et le bas de l'échelle (s).

(*) : Le coefficient de frottement est le rapport de la force de frottement maximale possible (force parallèle à la surface d'appui) sur la réaction normale (perpendiculaire à cette surface).

3.1. Tracer un croquis et y faire apparaître les efforts en jeu : poids de Toto, poids de l'échelle, efforts exercés par le mur et le sol sur l'échelle.
3.2. Ecrire les équations exprimant l'équilibre de l'échelle.
3.3. En déduire les valeurs de R_B^X et R_B^Y, les composantes de l'effort exercé par le sol sur le bas de l'échelle.
3.4. Compte tenu de la définition du coefficient de frottement ci-dessus, donner la valeur maximale possible de la force de frottement R_B^X.
3.5. Pour quelle valeur critique s_c de s cette valeur maximale de R_B^X est-elle atteinte ?
3.6. Application numérique :

$f = 0,2$　　$h = 10\ m$　　$m_e = 10\ kg$　　$m_T = 40\ kg$　　$g = 9,81\ m/s^2$

Calculer s_c pour α = 40°, 60° et 70°
3.7. Tracer les variations de s_c en fonction de α, en tenant compte du fait qu'obligatoirement $0 < s_c < h$.
3.8. Que se passerait-t-il si le coefficient de frottement échelle-sol était nul et que le coefficient de frottement échelle-mur n'était pas nul ?

utbm
université de technologie
Belfort-Montbéliard

CP46 – Automne 2007
Corrigé de l'Examen MEDIAN
07/11/2007

Eléments de réponses

<u>Question 1.1</u>
Equations définissant la trajectoire du colis de l'hélicoptère :

$$\boxed{x = 0 \qquad y = 0 \qquad z = -\frac{1}{2} g\, t^2 + H}$$

<u>Question 1.2</u>
Le colis de l'hélicoptère atteint le sol au bout d'un temps t_{m1} tel que :

$$-\frac{1}{2} g\, t_{m1}^2 + H = 0$$

$$\boxed{t_{m1} = \sqrt{\frac{2H}{g}}}$$

<u>Question 1.3</u>
Equations définissant la trajectoire du colis de l'avion 1 :

$$\boxed{x = V_{0X} t + A \qquad y = 0 \qquad z = -\frac{1}{2} g\, t^2 + H}$$

<u>Question 1.4</u>
Le colis de l'avion 1 atteint le sol au bout d'un temps t_{m2} tel que :

$$-\frac{1}{2} g\, t_{m2}^2 + H = 0$$

$t_{m2} = \sqrt{\frac{2H}{g}}$, soit le même temps que celui mis par le colis de l'hélicoptère.

Coordonnées du point de chute :

$$\boxed{x = V_{0X}\sqrt{\frac{2H}{g}} + A \qquad y = 0 \qquad z = 0}$$

<u>Question 1.5</u>
Equations définissant la trajectoire du colis de l'avion 2 :

$$\boxed{x = V_{0X} t + A \qquad y = V_{0Y} t + B \qquad z = -\frac{1}{2} g\, t^2 + V_{0Z} t + H}$$

<u>Question 1.6</u>
Le colis de l'avion 2 atteint le sol au bout d'un temps t_{m3} tel que :

$$-\frac{1}{2} g\, t_{m3}^2 + V_{0Z} t_{m3} + H = 0$$

C'est une équation du second degré qui a 2 solutions :

$$t = \frac{V_{0Z}}{g}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2gH}{V_{0Z}^2}}\right)$$

La plus petite des 2 solutions est négative, elle correspond à l'intersection de la trajectoire parabolique du colis avec le sol en arrière du point de largage par rapport à la direction de l'avion 2.
Le temps t_{m3} correspond donc à la plus grande des racines.

$$\boxed{t_{m3} = \frac{V_{0Z}}{g}\left(1+\sqrt{1+\frac{2\,g\,H}{V_{0Z}^2}}\right)}$$

Question 1.7

Coordonnées du point de chute du colis de l'avion 2 :

$x = V_{0X} t_{m3} + A \qquad y = V_{0Y} t_{m3} + B \qquad z = 0$

Distance entre ce point et l'origine du repère :

$$\boxed{D = \sqrt{\left(V_{0X} t_{m3} + A\right)^2 + \left(V_{0Y} t_{m3} + B\right)^2}}$$

Question 2.1

La contrainte de compression exercée par le poids de la masse M sur la face supérieure de poteau est égale à ce poids divisé par la surface où il se répartit.

$$n_1 = -\frac{M\,g}{S(h)}$$

D'où la valeur de cette surface nécessaire pour obtenir la contrainte n_1 = - c spécifiée.

$$\boxed{S(h) = \frac{M\,g}{c}}$$

Question 2.2

n_1, la contrainte normale due à l'effort normal, est donnée par :

$$\boxed{n_1 = \frac{N(x)}{S(x)}}$$

Question 2.3

$N(x) = n_1\, S(x)$ implique directement, si n_1 est constante et vaut - c :

$$\boxed{dN = -\,c\,dS}$$

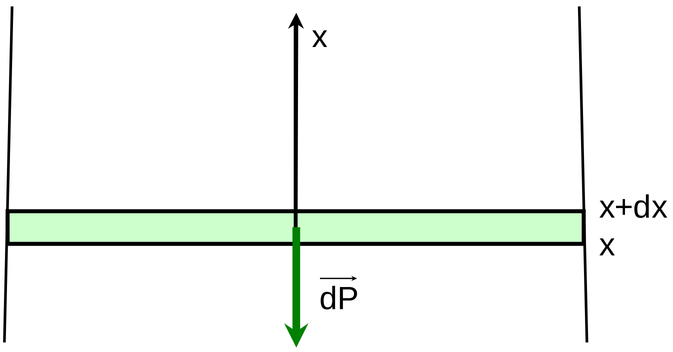
Question 2.4

Volume d'un tronçon élémentaire de poteau :

$dV = S(x)\,dx$

D'où, compte tenu de la masse volumique et de la gravité, le poids de ce tronçon élémentaire :

$$\boxed{dP = -\,\rho\,g\,S(x)\,dx}$$



Question 2.5

Quand l'abscisse de la section passe de x à x + dx, compte tenu de l'orientation de la poutre vers le haut, l'effort normal diminue du poids du tronçon parcouru.

$dN = -dP$

$$\boxed{dN = \rho\, g\, S(x)\, dx}$$

Question 2.6

Les questions 2.3 et 2.5 donnent 2 expressions de la variation élémentaire de l'effort normal, qui reviennent à une équation différentielle à laquelle doit satisfaire S(x) :

$-c\, dS = \rho\, g\, S(x)\, dx$

$$\boxed{\frac{dS}{dx} = -\frac{\rho\, g}{c} S(x)}$$

Question 2.7

Forme générale de la solution de l'équation différentielle :

$S(x) = A \exp\left(-\frac{\rho\, g}{c} x\right)$, où A est une constante dépendant des conditions aux limites.

Ici, la condition à satisfaire découle du résultat de la question 2.1 : $S(h) = \frac{M\, g}{c}$

$$\boxed{S(x) = \frac{M\, g}{c} \exp\left[\frac{\rho\, g}{c}(h - x)\right]}$$

Question 2.8

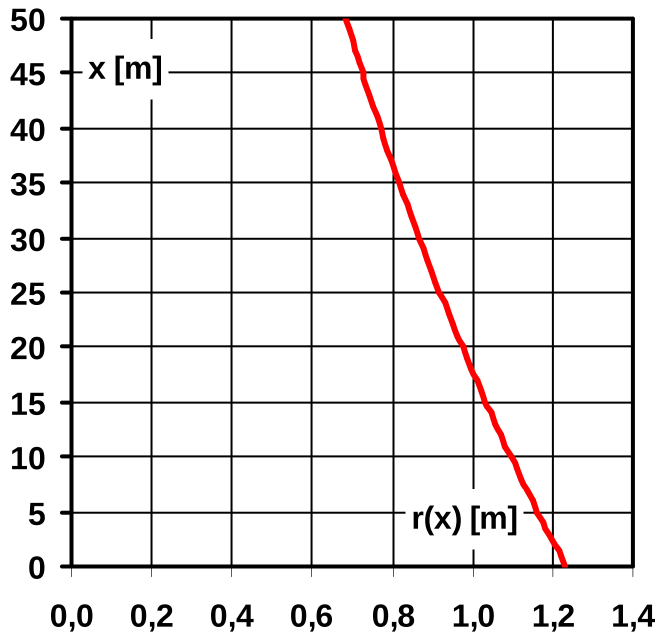
Expression du rayon de la section circulaire :

$$r(x) = \sqrt{\frac{S(x)}{\pi}}$$

$$r(x) = \sqrt{\frac{M\, g}{c\, \pi}} \exp\left[\frac{\rho\, g}{2\, c}(h - x)\right]$$

Application numérique :

r(0) = 1,23 m
r(h) = 0,68 m

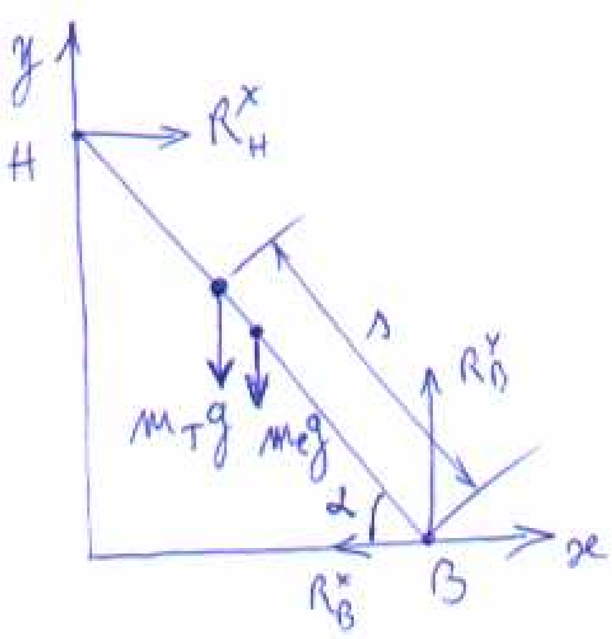


Remarque :

La valeur de 1 Mpa donnée ici est arbitraire, elle n'est inspirée d'aucune norme de construction d'ouvrages en béton. Le dimensionnement de telles structures est certainement bien plus complexe et doit prendre en compte d'autres phénomènes, très probablement plus contraignants (flambement, flexions dues à des causes diverses, comme un léger déséquilibre, le vent ou les tremblements de terre, ...).

CP46 – Automne 2007
Corrigé de l'Examen MEDIAN
07/11/2007

Question 3.1



Question 3.2

Equations d'équilibre des efforts (suivant les 2 directions x et y) et des moments par rapport au point B (composante unique suivant la direction z) :

$$\boxed{\begin{aligned} & R_H^X = R_B^X \\ & R_B^Y = \left(m_T + m_e\right) g \\ & R_H^X \; h \sin\alpha = g \cos\alpha \left(m_T s + m_e \frac{h}{2} \right) \end{aligned}}$$

Question 3.3

Les équations d'équilibre ci-dessus fournissent directement :

$$\boxed{\begin{aligned} & R_B^X = \frac{g \cos\alpha}{h \sin\alpha} \left(m_T s + m_e \frac{h}{2} \right) \\ & R_B^Y = \left(m_T + m_e \right) g \end{aligned}}$$

Question 3.4

Définition du coefficient de frottement : $f = \dfrac{R_{B\max}^X}{R_B^Y}$

D'où : $R_{B\max}^X = f \, R_B^Y$

$$\boxed{R_{B\max}^X = f \, g \left(m_T + m_e \right)}$$

Question 3.5

$R_B^X = R_{B\max}^X$ pour $s = s_c$ revient à :

$$\frac{g \cos\alpha}{h \sin\alpha} \left(m_T s_c + m_e \frac{h}{2} \right) = f \, g \left(m_T + m_e \right)$$

D'où s_c peut être tiré :

$$\boxed{s_c = \frac{h}{m_T}\left[f\left(m_T + m_e\right)\tan\alpha - \frac{m_e}{2}\right]}$$

Question 3.6

α [°]	s_c [m]
40	0,85
60	3,08
70	5,62

Question 3.7

s_c est nécessairement compris entre 0 et h.

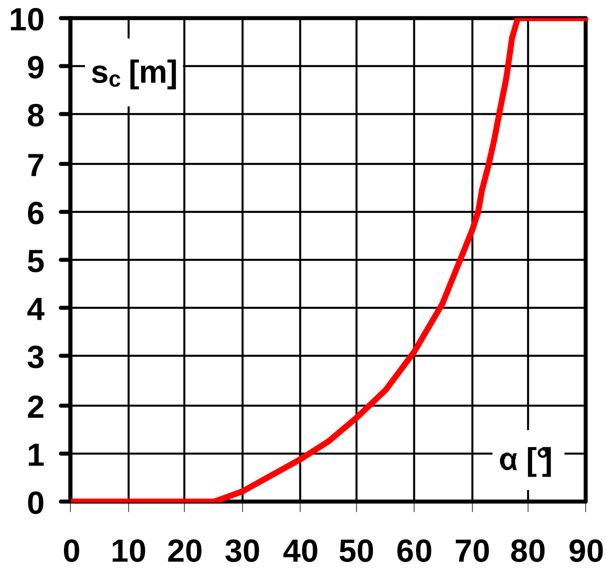
La formule de la question 3.5 donne les seuils correspondant α_0 et α_h pour α.

$$0 = \frac{h}{m_T}\left[f\left(m_T + m_e\right)\tan\alpha_0 - \frac{m_e}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = \arctan\left(\frac{m_e}{2\,f\left(m_T + m_e\right)}\right)$$

$$h = \frac{h}{m_T}\left[f\left(m_T + m_e\right)\tan\alpha_h - \frac{m_e}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \alpha_h = \arctan\left(\frac{2m_T + m_e}{2\,f\left(m_T + m_e\right)}\right)$$



α_0 [°]	26,6
α_h [°]	77,5

Question 3.8

Si le coefficient de frottement est nul en B, $R_B^X = 0$.

Alors, compte tenu de l'équilibre des efforts suivant x, $R_H^X = 0$ également, ce qui impose $R_H^Y = 0$, quel que soit le coefficient de frottement de l'échelle contre le mur, en H.

Le seul équilibre possible serait alors une échelle parfaitement verticale, et Toto ne pourrait pas y monter en restant lui-même vertical.