CP46 – Automne 2007
Sujet de l'Examen MEDIAN
07/11/2007

3 exercices indépendants - Durée : 2 h - Documents autorisés

1. Largages.

La zone des opérations est munie d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, dans lequel un point possède les coordonnées x, y et z.
Toute masse y est soumise à un champ de pesanteur uniforme, dont l'accélération est $\vec{G} = -g\vec{k}$.
Un hélicoptère et 2 avions doivent chacun larguer un colis de masse m sur une plaine parfaitement plane et horizontale, confondue avec le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Les pilotes veulent prédire les trajectoires de leurs colis quand ils les auront largués sans vitesse initiale par rapport à leur aéronef, en les considérant comme des points pesants soumis uniquement à l'action de la pesanteur, sans tenir compte des effets de l'air.

Quand l'hélicoptère largue son colis, à l'instant t = 0, il est immobile au point (0, 0, H).

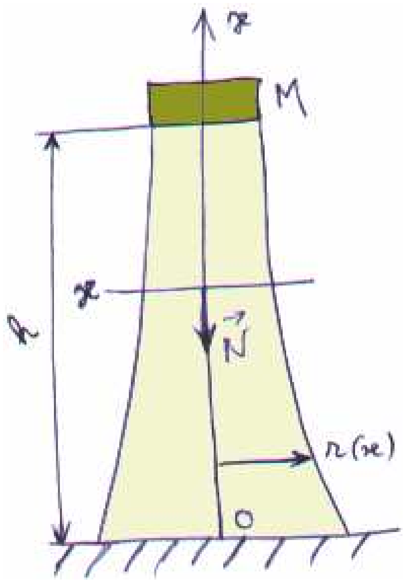
1.1. Ecrire les équations décrivant la trajectoire du colis largué par l'hélicoptère, sous la forme $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$.
1.2. Au bout de quel temps t_{m1} ce 1er colis atteindra-il le sol ?

L'avion 1 largue son colis au même instant t = 0, en passant au point (A, 0, H) avec une vitesse $\vec{V_1} = V_{0X}\ \vec{i}$.

1.3. Ecrire les équations décrivant la trajectoire du colis largué par l'avion 1 sous la forme $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$.
1.4. Quelles seront les coordonnées du point de chute de ce 2ème colis ?

L'avion 2 largue son colis au même instant t = 0, en passant au point (A, B, H) avec une vitesse $\vec{V_1} = V_{0X}\ \vec{i} + V_{0Y}\ \vec{j} + V_{0Z}\ \vec{k}$.

1.5. Ecrire les équations décrivant la trajectoire du colis largué par l'avion 2 sous la forme $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$.
1.6. Au bout de quel temps t_{m3} ce 3ème colis atteindra-il le sol ?
1.7. Quelle sera, en fonction du temps t_{m3}, la distance entre le point de chute de ce 3ème colis et l'origine O du repère ?



2. Poteau iso-contrainte en compression.

Un poteau vertical en béton, de masse volumique ρ, supporte une masse M.
Le but de l'exercice est de déterminer, si c'est possible, un profil tel que la contrainte normale de compression n_1 soit constante dans tout le poteau, $n_1 = -c$.
On est dans le champ de pesanteur terrestre où le poids de tout objet est un effort vertical, orienté vers le bas, proportionnel à sa masse et à l'accélération de la pesanteur g.
Le poteau est orienté par un axe Ox allant de sa base O vers son sommet où x = h.
La section du poteau est circulaire pleine, son rayon r(x) varie sur la hauteur du poteau.

CP46 – Automne 2007
Sujet de l'Examen MEDIAN
07/11/2007

2.1. Quelle doit être la surface S(h) de la section supérieure du poteau, pour que le poids de la masse M, supposée uniformément répartie, y génère la contrainte uniforme $n_1 = - c$?
2.2. Comment s'exprime la contrainte de compression n_1 dans une section quelconque, en fonction de l'effort normal N(x) et de la surface S(x) de la section ?
2.3. En déduire la variation élémentaire dN de l'effort normal en fonction d'une variation élémentaire dS de la section, lorsque n_1 a une valeur constante égale à - c.
2.4. Quel est le poids dP d'un tronçon élémentaire de poteau d'épaisseur dx ?
2.5. N étant l'effort normal en x et N + dN l'effort normal en x + dx, utiliser le résultat de la question précédente pour exprimer la variation élémentaire dN.
2.6. En rapprochant les résultats des questions 2.3 et 2.5, écrire l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire S(x).
2.7. Résoudre cette équation différentielle et donner l'expression de S(x).
2.8. Application numérique :
M =150 t c = 1 MPa ρ = 2400 kg/m^3
g = 9,81 m/s^2 h = 50 m
Calculer les valeurs du rayon r(x) de la section circulaire pour x = 0 et x = h.
Tracer schématiquement l'évolution de r(x) en fonction de x, ce qui donnera une idée du profil du poteau.

3. Toto monte à l'échelle.

Toto monte sur une échelle posée contre un mur vertical (x = 0) et sur le sol horizontal (y = 0), en se tenant verticalement, sans effort sur les mains.
Jusqu'où pourra-t-il monter sans que le bas de l'échelle glisse ?

Hypothèse : le coefficient de frottement (*) échelle-mur est nul.
Données fixes : masse et longueur de l'échelle (m_e, h), masse de Toto (m_T), accélération de la pesanteur (g), coefficient de frottement (*) échelle-sol (f).
Données variables : angle entre le sol et l'échelle (α), distance entre les pieds de Toto et le bas de l'échelle (s).

(*) : Le coefficient de frottement est le rapport de la force de frottement maximale possible (force parallèle à la surface d'appui) sur la réaction normale (perpendiculaire à cette surface).

3.1. Tracer un croquis et y faire apparaître les efforts en jeu : poids de Toto, poids de l'échelle, efforts exercés par le mur et le sol sur l'échelle.
3.2. Ecrire les équations exprimant l'équilibre de l'échelle.
3.3. En déduire les valeurs de R_B^X et R_B^Y, les composantes de l'effort exercé par le sol sur le bas de l'échelle.
3.4. Compte tenu de la définition du coefficient de frottement ci-dessus, donner la valeur maximale possible de la force de frottement R_B^X, pour un angle α donné.
3.5. Pour quelle valeur critique s_c de s cette valeur maximale de R_B^X est-elle atteinte ?
3.6. Application numérique :
$f = 0{,}2$ $h = 10$ m $m_e = 10$ kg $m_T = 40$ kg
Calculer s_c pour α = 40°, 60° et 70°.
3.7. Tracer les variations de s_c en fonction de α, en tenant compte du fait qu'obligatoirement $0 < s_c < h$.
3.8. Que se passerait-t-il si le coefficient de frottement échelle-sol était nul et que le coefficient de frottement échelle-mur n'était pas nul ?