

3 exercices indépendants - Durée : 2 h - Documents autorisés

1. Jojo le singe se suspend à la corde à linge.



Fig. 1 : Test préliminaire.

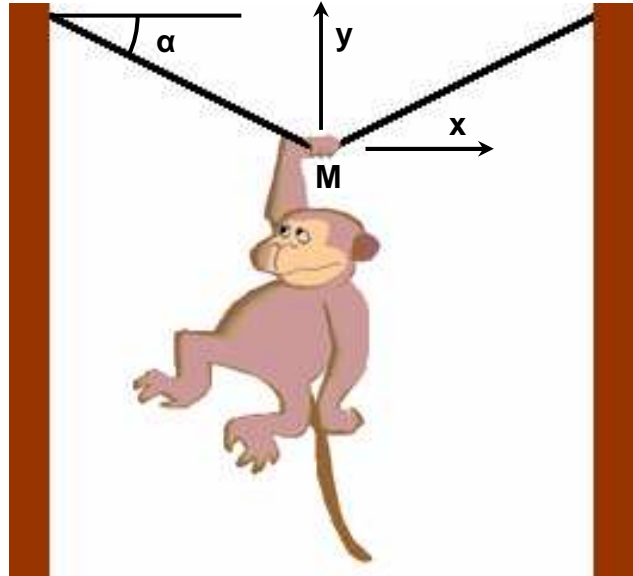


Fig. 2 : Essai de suspension.

Lors d'un test préliminaire (Fig. 1), Jojo a vérifié que son poids P est inférieur à la tension maximale T_{\max} que peut supporter la corde.

Ensuite, il se suspend exactement au centre d'une corde de mêmes caractéristiques fixée entre 2 arbres et constate que chacun des 2 brins symétriques fait un angle α par rapport à l'horizontale (Fig. 2).

- 1.1. Dans la configuration de la Fig. 2, écrire les équations qui traduisent l'équilibre du point M où Jojo s'accroche à la corde et sur lequel agissent son poids P (dirigé suivant l'axe vertical My , vers le bas) et les tensions T des 2 brins de la corde.
- 1.2. En déduire l'expression de la tension T en fonction du poids P et de l'angle α .
- 1.3. Tracer schématiquement le graphe des variations de T en fonction de α , qui peut varier de 0 à $\pi/2$, en précisant ce qui se passe pour ces 2 valeurs extrêmes.
- 1.4. Existe-t-il une valeur critique α_c de α pour laquelle T atteint T_{\max} , entraînant une rupture de la corde ?
- 1.5. La corde est élastique, ce qui veut dire qu'il existe un facteur de proportionnalité K entre la tension T à laquelle elle est soumise et son allongement. Cela se traduit par l'équation $T = K(L - L_0)$, où L est la longueur d'un brin de la corde lorsque Jojo s'y suspend (Fig. 2) et L_0 sa longueur au repos.
Si les 2 arbres de la Fig. 2 sont distants de $2L_0$, quelle est la valeur de la tension T en fonction de K , L_0 et α .
- 1.6. Compte tenu de cette expression, tracer schématiquement un nouveau graphe des variations de T en fonction de α , qui peut varier de 0 à $\pi/2$, en précisant ce qui se passe pour ces 2 valeurs extrêmes.

- 1.7. L'expression $T(\alpha)$ répondant à la question 1.2 traduit l'équilibre des efforts.
L'expression $T(\alpha)$ répondant à la question 1.5 traduit l'élasticité de la corde.
En rapprochant ces 2 résultats, écrire l'équation qui permet de déterminer l'angle α que feront les 2 brins de la corde avec l'horizontale lorsque le système de la Fig. 2 sera en équilibre (Il n'est pas demandé de résoudre cette équation).

2. Le bras de centrifugeuse isocontrainte.

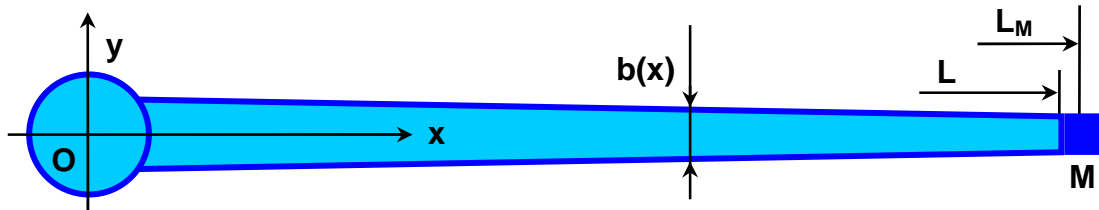


Fig. 3 : Bras tournant autour du point O.

La Fig. 3 représente un dispositif qui permet de soumettre à d'importants efforts centrifuges une masse M fixée à l'extrémité d'un bras en rotation autour de son extrémité opposée. Le bras est considéré comme une poutre droite orientée par l'axe x , de section rectangulaire, avec une largeur $b(x)$ variable en fonction de x et une épaisseur e constante. Il est constitué d'un matériau homogène de masse volumique ρ . On cherche à optimiser le profil $b(x)$ pour obtenir une contrainte uniforme dans la pièce en fonctionnement.

- 2.1. L'ensemble de la Fig. 3 tourne autour de l'axe Oz avec une vitesse constante ω . Le centre de gravité de la masse M est situé à une distance L_M de l'axe de rotation. Quelle est l'intensité de l'effort centrifuge F_M auquel est soumise la masse M ?
- 2.2. Dans le cas le plus général, comment s'appellent les composantes du tenseur de cohésion en une section x quelconque du bras ?
Lesquelles de ces composantes sont a priori nulles dans le cas de fonctionnement décrit ci-dessus ?
- 2.3. Quelle doit être la largeur $b(L)$ de la section du bras la plus éloignée de l'axe de rotation, pour que l'effort F_M , supposé uniformément réparti, y génère une contrainte uniforme $n_1 = c$?
- 2.4. Comment s'exprime la contrainte n_1 dans une section quelconque, en fonction de l'effort normal $N(x)$, de la largeur locale du bras $b(x)$ et de son épaisseur e ?
- 2.5. En déduire la variation élémentaire dN de l'effort normal en fonction d'une variation élémentaire db de la largeur du bras, lorsque n_1 a une valeur constante égale à c .
- 2.6. Quel est l'effort centrifuge dF_C d'un tronçon élémentaire du bras, de longueur dx ?
- 2.7. N étant l'effort normal en x et $N + dN$ l'effort normal en $x + dx$, utiliser le résultat de la question précédente pour exprimer la variation élémentaire dN .
- 2.8. En rapprochant les résultats des questions 2.5 et 2.7, écrire l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire $b(x)$.
- 2.9. Résoudre cette équation différentielle, prendre en compte la condition en $x = L$ (question 2.3) et donner l'expression de $b(x)$ qui permettra de réaliser un bras isocontrainte.

3. Flexions sur 2 appuis simples.

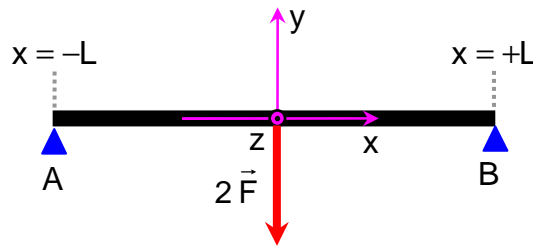


Fig. 4 : Flexion d'une poutre sous l'effet d'une force ponctuelle appliquée en son centre.

Une poutre droite longueur $2L$ est posée sur des appuis simples en ses 2 extrémités, un effort $2F$ transversal est appliqué ponctuellement en son centre (Fig. 4).

- 3.1. Quelle est la valeur du moment fléchissant le long de la poutre ?
Tracer un graphique schématique représentant son évolution en fonction de x .
- 3.2. En quel point précis la contrainte due au moment fléchissant est-elle maximale et quelle est cette valeur maximale ?
- 3.3. La poutre possède une section en I normalisée, conforme au Tab. 1.
Si $L = 3$ m et $F = 5000$ N, quel est le plus petit profil du Tab. 1 qui permet d'avoir une contrainte maximale inférieure à 100 MPa ?

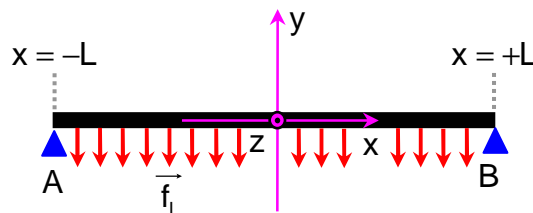


Fig. 5 : Flexion d'une poutre sous l'effet d'une force répartie sur toute sa longueur.

Une poutre semblable est maintenant soumise sur toute sa longueur à un effort uniformément réparti $f_L = F/L$, conformément à la Fig. 5.

- 3.4. Quelle est la valeur du moment fléchissant le long de la poutre ?
Tracer un graphique schématique représentant son évolution en fonction de x .
- 3.5. En quel point précis la contrainte due au moment fléchissant est-elle maximale et quelle est cette valeur maximale ?
- 3.6. Si, comme précédemment, $L = 3$ m et $F = 5000$ N, quel est le plus petit profil du Tab. 1 qui permet d'avoir une contrainte maximale inférieure à 100 MPa ?

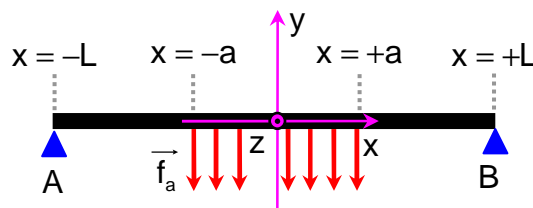


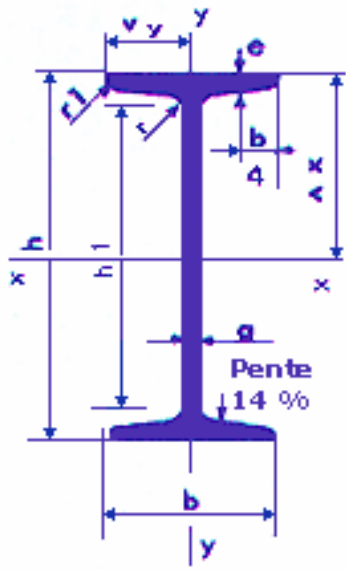
Fig. 6 : Flexion d'une poutre sous l'effet d'une force répartie sur une partie de sa longueur.

CP46 – Automne 2008
Corrigé de l'Examen MEDIAN
05/11/2008

Une poutre semblable aux précédentes est maintenant soumise, dans sa zone centrale, entre $x = -a$ et $x = a$, à un effort uniformément réparti $f_a = F/a$, conformément à la Fig. 6.

- 3.7. Quelle est la valeur du moment fléchissant le long de la poutre ?
Tracer un graphique schématique représentant son évolution en fonction de x .
- 3.8. Donner l'expression du moment fléchissant maximum en fonction de a .
Quelles valeurs prend-il pour $a = 0$ et $a = L$?
- 3.9. Conclure : si la même charge peut être répartie de différentes façons et si le critère de dimensionnement de la poutre est la contrainte maximale, quelle sera la valeur de a qui conduira à choisir la poutre de plus petite section, donc la moins chère ?

IPN
NF A 45209



Profils	Poids kg/m	Dimensions mm						Section cm ²	Moments d'inertie		Modules de résistance	
		h	b	a - r	e	r1	h1		I _x cm ⁴	I _y cm ⁴	I _x / W _x cm ³	I _y / W _y cm ³
80	5,95	80	42	3,9	5,9	2,3	59	7,58	77,8	6,29	19,5	3,00
100	8,32	100	50	4,5	6,8	2,7	75	10,6	171	12,2	34,2	4,88
120	11,2	120	58	5,1	7,7	3,1	92	14,2	328	21,5	54,7	7,41
140	14,4	140	66	5,7	8,6	3,4	109	18,3	573	35,2	81,9	10,7
160	17,9	160	74	6,3	9,5	3,8	125	22,8	935	54,7	117	14,8
180	21,9	180	82	6,9	10,4	4,1	142	27,9	1450	81,3	161	19,8
200	26,3	200	90	7,5	11,3	4,5	159	33,5	2140	117	214	26,0
220	31,1	220	98	8,1	12,2	4,9	175	39,6	3060	162	278	33,1
240	36,2	240	106	8,7	13,1	5,2	192	46,1	4250	221	354	41,7
280	48,0	280	119	10,1	15,2	6,1	225	61,1	7590	364	542	61,2
300	54,2	300	125	10,8	16,2	6,5	241	69,1	9800	451	653	72,2

Tab. 1 : Caractéristiques géométriques des sections IPN normalisées.
[1 (Produits sidérurgiques - Poutrelles - IPN)].

Références :

[1] - DANIEL - Quincaillerie, Fournitures Industrielles et Produits Sidérurgiques
« Depuis 1830, nous sommes spécialisés dans le négoce de Fournitures Industrielles, de Quincaillerie et de Produits Sidérurgiques. »

<http://www.daniel.fr/daniel.php>

Eléments de réponses

Question 1.1

Equations d'équilibre des efforts au point d'accrochage.

$$\begin{cases} -T \cos \alpha + T \cos \alpha = 0 \\ 2T \sin \alpha - P = 0 \end{cases}$$

Question 1.2

$$T = \frac{P}{2 \sin \alpha}$$

Question 1.3

Quand α tend vers 0, T tend vers l'infini.

Quand $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $T = \frac{P}{2}$.

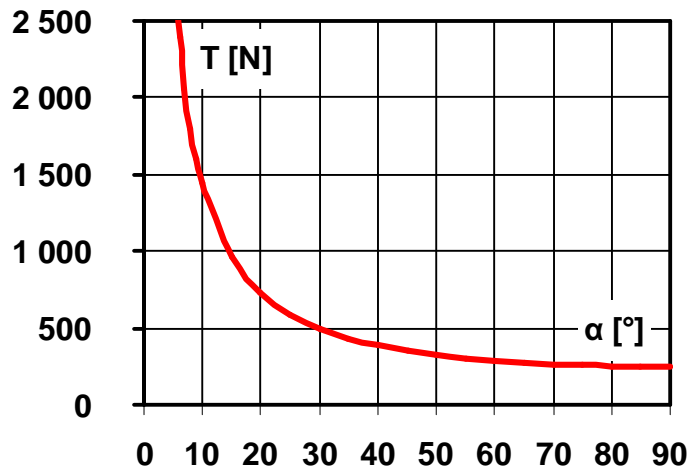


Fig. 7 : Evolutions de T en fonction de α pour $P = 500$ N.

Question 1.4

Il existe toujours une valeur α_c pour laquelle T atteint T_{\max} , il suffit qu'elle réalise :

$$T_{\max} = \frac{P}{2 \sin \alpha_c}$$

$$\alpha_c = \text{Arcsin} \left(\frac{P}{2 T_{\max}} \right)$$

Question 1.5

Par définition de K : $T = K (L - L_0)$

La géométrie du système implique d'autre part : $L = \frac{L_0}{\cos \alpha}$

$$T = K L_0 \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right)$$

Question 1.6

Quand α vaut 0, $L = L_0$ et $T = 0$.

Quand α tend vers $\frac{\pi}{2}$, T tend vers l'infini.

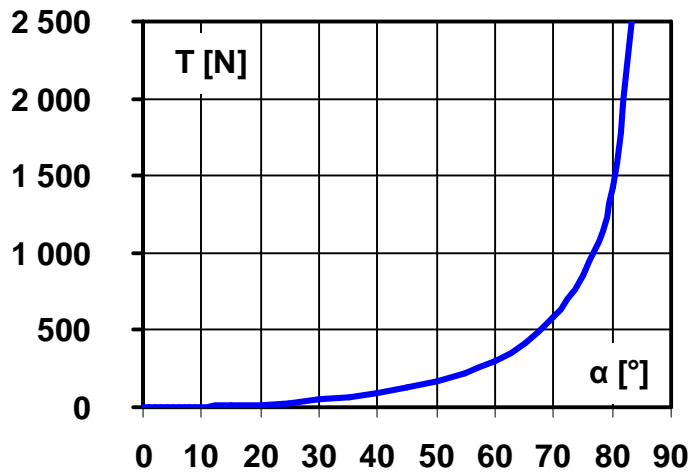


Fig. 8 : Evolutions de T en fonction de α pour $L_0 = 2$ m et $K = 150$ N/m.

Question 1.7

La tension T se déduit de l'effort imposé P : $T = \frac{P}{2 \sin \alpha}$.

Elle se déduit aussi de l'allongement $L - L_0$ de la corde : $T = K L_0 \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right)$.

L'égalité de ces 2 expressions de T fournit l'équation à laquelle doit satisfaire α .

$$\frac{P}{2 \sin \alpha} = K L_0 \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right)$$

La résolution de cette équation pour obtenir l'angle d'équilibre α n'est pas simple.

La Fig. 9 illustre les 2 conditions à satisfaire.

L'angle α obtenu à l'équilibre est celui pour lequel les 2 courbes se croisent.

Avec les valeurs numériques qui ont servi à tracer les graphiques, une résolution numérique (Excel – Outils – Valeur cible) donne $\alpha = 59,5^\circ$.

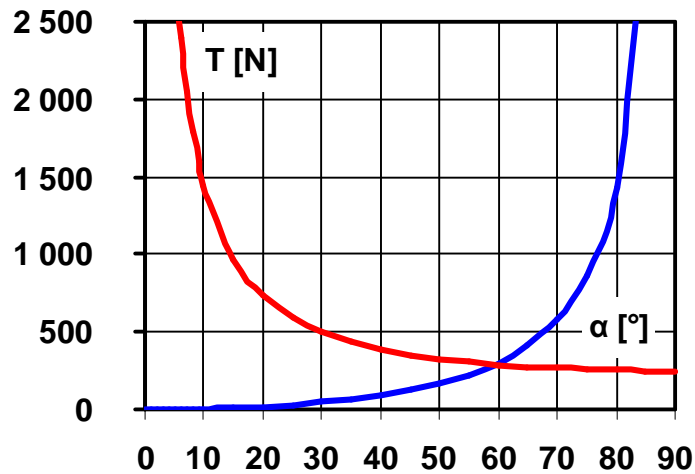


Fig. 9 : Superposition des Fig. 7 et Fig. 8.

Question 2.1

$$F_M = M L_M \omega^2$$

Question 2.2

$$\{T_{\text{Cohésion}}\} = \begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_y & M_y \\ T_z & M_z \end{Bmatrix}$$

N : Effort normal, non-nul dans cet exercice.

T_y, T_z : Efforts tranchants, nuls ici.

M_t : Moment de torsion, nul ici.

M_y, M_z : Moments fléchissants, nuls ici.

Question 2.3

La contrainte de traction due à l'effort centrifuge F_M de la masse M , qui s'exerce sur la face extrême du bras, est égale à cet effort divisé par la surface où il se répartit.

$$n_1 = \frac{M L_M \omega^2}{e b(L)}$$

D'où la valeur de la largeur $b(L)$ nécessaire pour obtenir la contrainte $n_1 = c$ spécifiée.

$$b(L) = \frac{M L_M \omega^2}{c e}$$

Question 2.4

n_1 , la contrainte normale due à l'effort normal, est donnée par :

$$n_1 = \frac{N(x)}{e b(x)}$$

Question 2.5

$N(x) = n_1 e b(x)$ implique directement, si n_1 est constante et vaut c :

$$dN = c e db$$

Question 2.6

Volume d'un tronçon élémentaire du bras :

$$dV = e b(x) dx$$

D'où l'effort centrifuge qui y apparaît, compte tenu de la masse volumique et de vitesse de rotation :

$$dF_C = \rho x \omega^2 e b(x) dx$$

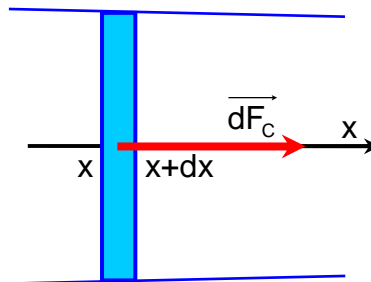


Fig. 10 : Effort centrifuge d'un tronçon élémentaire de bras

Question 2.7

Quand l'abscisse de la section passe de x à $x + dx$, l'effort normal diminue de l'effort centrifuge du tronçon parcouru.

$$dN = -dF_C$$

$$dN = -\rho x \omega^2 e b(x) dx$$

Question 2.8

Les questions 2.5 et 2.7 donnent 2 expressions de la variation élémentaire de l'effort normal, qui reviennent à une équation différentielle à laquelle doit satisfaire $b(x)$:

$$c e db = -\rho x \omega^2 e b(x) dx$$

$$\frac{db}{dx} = -\frac{\rho \omega^2}{c} x b(x)$$

Question 2.9

Forme générale de la solution de l'équation différentielle :

$$b(x) = A \exp\left(-\frac{\rho \omega^2}{2c} x^2\right), \text{ où } A \text{ est une constante dépendant des conditions aux limites.}$$

Ici, la condition à satisfaire découle du résultat de la question 2.3 : $b(L) = \frac{ML_M \omega^2}{c e}$

$$b(x) = \frac{ML_M \omega^2}{c e} \exp\left[\frac{\rho \omega^2}{2c} (L^2 - x^2)\right]$$

La Fig. 11 montre l'évolution de b en fonction de x avec les valeurs numériques suivantes :

$M = 500 \text{ kg}$	$\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$
$L_M = 7,5 \text{ m}$	$\omega = 10 \text{ rd/s}$
$L = 7 \text{ m}$	$c = 50 \text{ MPa}$
$e = 0,1 \text{ m}$	

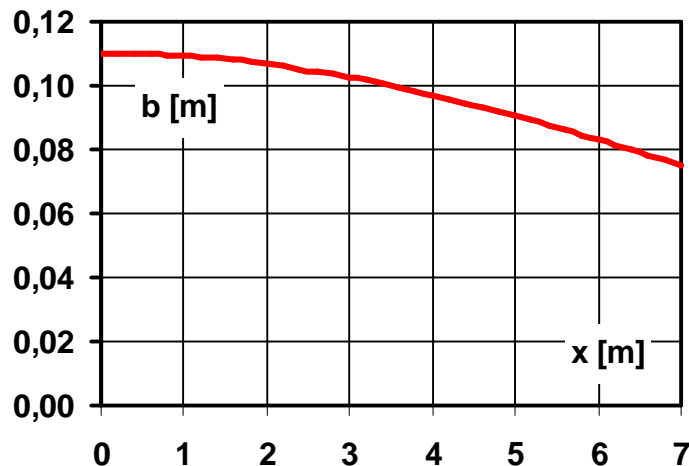


Fig. 11 : Evolution de b en fonction de x dans un cas particulier.

Question 3.1

La poutre est soumise à 3 efforts parallèles, qui s'équilibrent, dans la direction y : $-2F$ au centre et $+F$ à chaque extrémité.

Elle doit être divisée en 2 tronçons à examiner successivement.

Tronçon 1 : $-L \leq x \leq 0$

$$M_z = F(L - x) - 2F(0 - x)$$

$$M_z = F(L + x)$$

Tronçon 2 : $0 \leq x \leq L$

$$M_z = F(L - x)$$

Remarque : il est également possible de raisonner en tenant compte de la symétrie (le moment fléchissant est dans ce cas une fonction paire de x).

Tracé des évolutions de M_z : voir Fig. 12.

Question 3.2

Le moment fléchissant est maximum au centre de la poutre, en $x = 0$, et vaut : $M_{z_{\max}} = FL$.

Dans toute section de la poutre, le moment fléchissant génère des contraintes normales n_1 . Ces contraintes ne dépendent pas de z et sont proportionnelles à y .

$$n_1 = -\frac{M_z y}{I_z}$$

Où I_z est le moment quadratique (ou moment d'inertie) de la section par rapport à l'axe z . En particulier, dans la section centrale :

$$n_1 = -\frac{M_{z_{\max}} y}{I_z}$$

La valeur maximale de cette contrainte est atteinte pour $y = y_{\min}$, c'est à dire sur le bord inférieur de la poutre, le long de la ligne transversale opposée à la ligne d'application de l'effort.

y_{\min} étant négatif, c'est une contrainte normale positive, donc de traction.

$$n_{1\max} = -\frac{FL y_{\min}}{I_z}$$

ou

$$n_{1\max} = \frac{FL |y|_{\max}}{I_z}$$

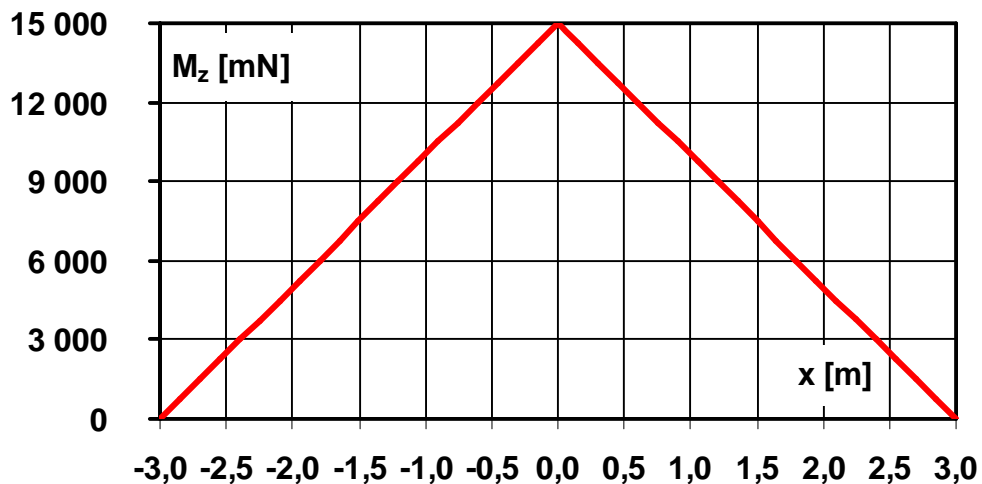


Fig. 12 : Evolution du moment fléchissant le long de la poutre chargé ponctuellement (valeur numériques de la question 3.3)

Question 3.3

$n_{1\max} < 100 \text{ MPa}$ implique $\frac{I}{v} > 150 \text{ cm}^3$, avec les valeurs numériques de l'énoncé et en

posant $\frac{I_z}{|y|_{\max}} = \frac{I}{v}$.

Il apparaît donc, et le Tab. 2 le vérifie, que la section minimale répondant à la question est l'IPN 180.

IPN	I/v	n ₁
	mm ³	Mpa
80	19500	769
100	34200	439
120	54700	274
140	81900	183
160	117000	128
180	161000	93
200	214000	70

Tab. 2 : Calcul de n₁ au centre de la poutre chargée ponctuellement.

Question 3.4

La définition de l'effort réparti conduit à la même charge totale, donc aux mêmes réactions des appuis, que pour la question 3.1.

Expression du moment fléchissant pour $-L \leq x \leq L$:

$$M_z = F(L-x) - \frac{fL}{2}(L-x)^2$$

$$M_z = \frac{FL}{2} \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right)$$

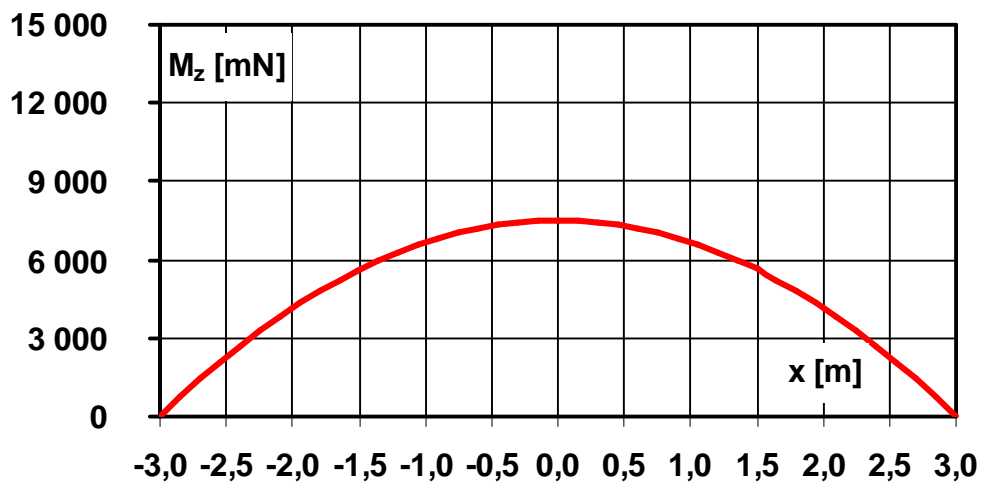


Fig. 13 : Evolution du moment fléchissant le long de la poutre chargé uniformément (valeurs numériques de la question 3.3)

Question 3.5

Le moment fléchissant est maximum au centre de la poutre, en $x = 0$: $M_{z_{\max}} = \frac{FL}{2}$

De même que pour la question 3.2, la valeur maximale de la contrainte n_1 est atteinte sur le bord inférieur de la section centrale de la poutre ($x = 0$ et $y = y_{\min}$).

$$n_{1\max} = -\frac{FL y_{\min}}{2I_z} \quad \text{ou} \quad n_{1\max} = \frac{FL |y|_{\max}}{2I_z}$$

Question 3.6

$n_{1\max} < 100 \text{ MPa}$ implique $\frac{I}{v} > 75 \text{ cm}^3$, avec les valeurs numériques de l'énoncé et en

posant $\frac{I_z}{|y|_{\max}} = \frac{I}{v}$.

Il apparaît donc, et le Tab. 3 le vérifie, que la section minimale répondant à la question est l'IPN 140.

CP46 – Automne 2008
Corrigé de l'Examen MEDIAN
05/11/2008

IPN	I/v	n ₁
	mm ³	Mpa
80	19500	385
100	34200	219
120	54700	137
140	81900	92
160	117000	64
180	161000	47
200	214000	35

Tab. 3 : Calcul de n₁ au centre de la poutre chargée uniformément.

Question 3.7

La définition de l'effort réparti dans la zone centrale de la poutre conduit à la même charge totale, donc aux mêmes réactions des appuis, que pour la question 3.1.

L'évolution du moment fléchissant en fonction de x peut être déterminée pour x ≥ 0, en envisageant 2 tronçons et en tenant compte de la symétrie (le moment fléchissant est dans ce cas une fonction paire de x) ou en découpant la poutre complète en 3 tronçons.

Tronçon 1 : -L ≤ x ≤ -a

$$M_z = F(L - x) - 2 a f_a (0 - x)$$

$$M_z = F(L + x)$$

Tronçon 2 : -a ≤ x ≤ a

$$M_z = F(L - x) - \frac{f_a}{2} (a - x)^2$$

$$M_z = FL \left(1 - \frac{x^2 + a^2}{2 a L} \right)$$

Tronçon 3 : a ≤ x ≤ L

$$M_z = F(L - x)$$

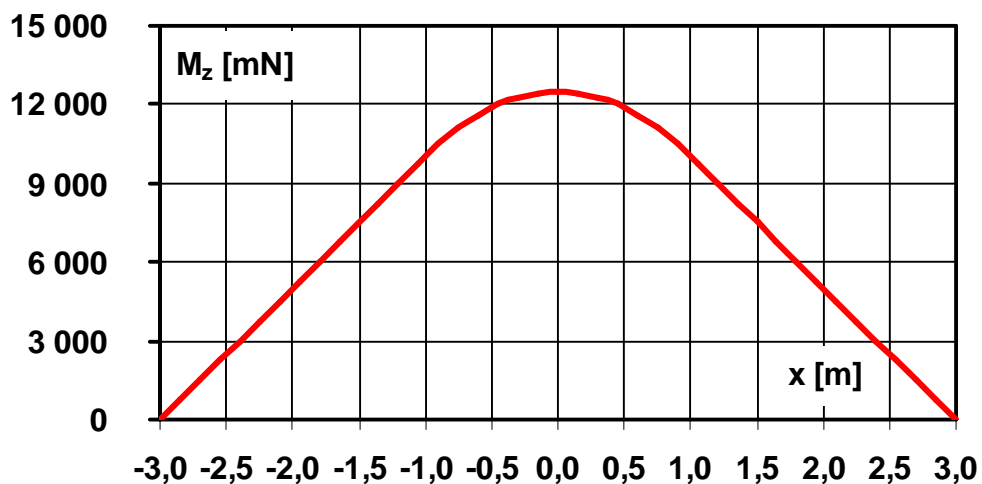


Fig. 14 : Evolution du moment fléchissant le long de la poutre chargée dans sa zone centrale (valeurs numériques de la question 3.3 et a = 1 m)

Question 3.8

Quelle que soit la valeur de a , le moment fléchissant maximum est atteint au centre de la poutre, pour $x = 0$.

$$M_{z_{\max}} = FL \left(1 - \frac{a}{2L} \right)$$

Naturellement, on retrouve les valeurs des questions 3.2 et 3.5 :

- pour $a = 0$: $M_{z_{\max}} = FL$

- pour $a = L$: $M_{z_{\max}} = \frac{FL}{2}$

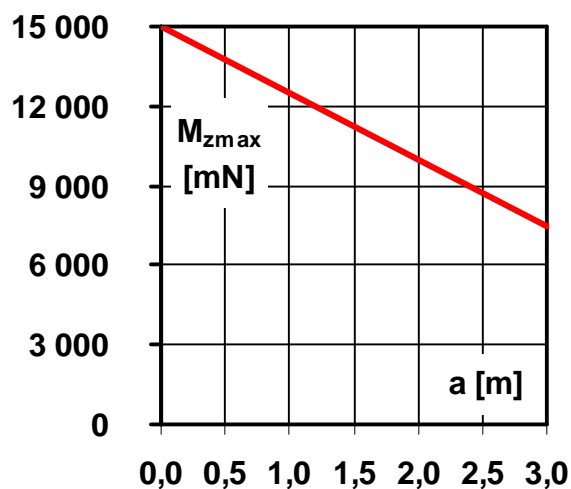


Fig. 15 : Evolution du moment fléchissant maximum en fonction de a .

Question 3.9

D'après ce qui précède, la valeur de a optimale est $a = L$.

Cet exercice montre qu'une charge uniformément répartie le long d'une poutre génère des contraintes de flexion maximales 2 fois plus faibles que la même charge appliquée ponctuellement sur la même poutre.

Autrement dit, pour un même niveau de contrainte et une même longueur, une poutre supportant une charge uniformément répartie pourra avoir une section inférieure à celle d'une poutre supportant la même charge appliquée ponctuellement.

Pour le dimensionnement d'une structure, il sera donc préférable de privilégier des efforts répartis, lorsque le choix est possible.