

3 exercices indépendants - Durée : 2 h - Documents autorisés

### 1. Jojo le singe se suspend à la corde à linge.



Fig. 1 : Test préliminaire.

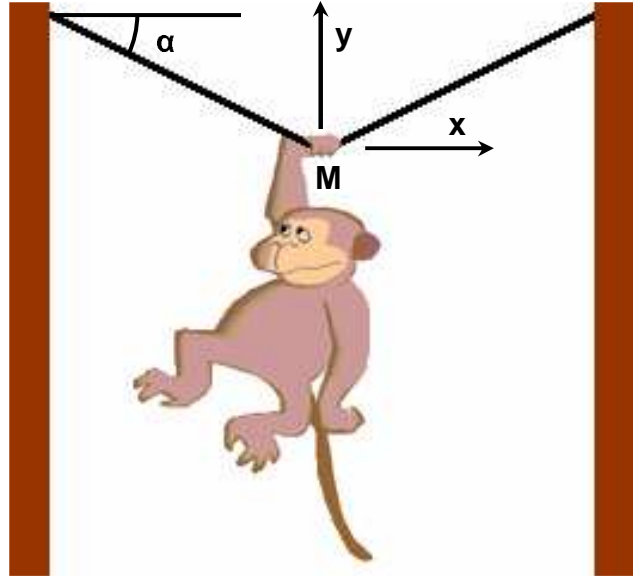


Fig. 2 : Essai de suspension.

Lors d'un test préliminaire (Fig. 1), Jojo a vérifié que son poids  $P$  est inférieur à la tension maximale  $T_{\max}$  que peut supporter la corde.

Ensuite, il se suspend exactement au centre d'une corde de mêmes caractéristiques fixée entre 2 arbres et constate que chacun des 2 brins symétriques fait un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale (Fig. 2).

- 1.1. Dans la configuration de la Fig. 2, écrire les équations qui traduisent l'équilibre du point  $M$  où Jojo s'accroche à la corde et sur lequel agissent son poids  $P$  (dirigé suivant l'axe vertical  $My$ , vers le bas) et les tensions  $T$  des 2 brins de la corde.
- 1.2. En déduire l'expression de la tension  $T$  en fonction du poids  $P$  et de l'angle  $\alpha$ .
- 1.3. Tracer schématiquement le graphe des variations de  $T$  en fonction de  $\alpha$ , qui peut varier de  $0$  à  $\pi/2$ , en précisant ce qui se passe pour ces 2 valeurs extrêmes.
- 1.4. Existe-t-il une valeur critique  $\alpha_c$  de  $\alpha$  pour laquelle  $T$  atteint  $T_{\max}$ , entraînant une rupture de la corde ?
- 1.5. La corde est élastique, ce qui veut dire qu'il existe un facteur de proportionnalité  $K$  entre la tension  $T$  à laquelle elle est soumise et son allongement. Cela se traduit par l'équation  $T = K(L - L_0)$ , où  $L$  est la longueur d'un brin de la corde lorsque Jojo s'y suspend (Fig. 2) et  $L_0$  sa longueur au repos.  
Si les 2 arbres de la Fig. 2 sont distants de  $2L_0$ , quelle est la valeur de la tension  $T$  en fonction de  $K$ ,  $L_0$  et  $\alpha$ .
- 1.6. Compte tenu de cette expression, tracer schématiquement un nouveau graphe des variations de  $T$  en fonction de  $\alpha$ , qui peut varier de  $0$  à  $\pi/2$ , en précisant ce qui se passe pour ces 2 valeurs extrêmes.

- 1.7. L'expression  $T(\alpha)$  répondant à la question 1.2 traduit l'équilibre des efforts.  
L'expression  $T(\alpha)$  répondant à la question 1.5 traduit l'élasticité de la corde.  
En rapprochant ces 2 résultats, écrire l'équation qui permet de déterminer l'angle  $\alpha$  que feront les 2 brins de la corde avec l'horizontale lorsque le système de la Fig. 2 sera en équilibre (Il n'est pas demandé de résoudre cette équation).

## 2. Le bras de centrifugeuse isocontrainte.

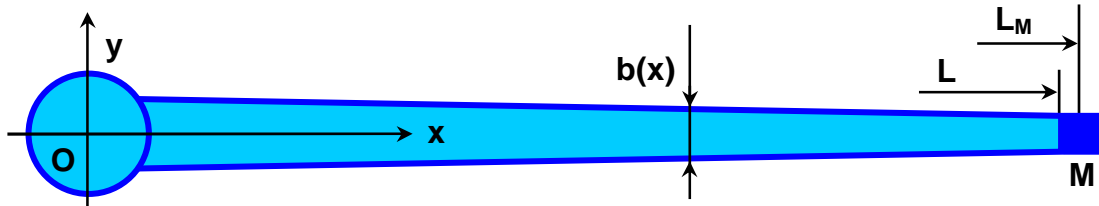


Fig. 3 : Bras tournant autour du point O.

La Fig. 3 représente un dispositif qui permet de soumettre à d'importants efforts centrifuges une masse  $M$  fixée à l'extrémité d'un bras en rotation autour de son extrémité opposée. Le bras est considéré comme une poutre droite orientée par l'axe  $x$ , de section rectangulaire, avec une largeur  $b(x)$  variable en fonction de  $x$  et une épaisseur  $e$  constante. Il est constitué d'un matériau homogène de masse volumique  $\rho$ . On cherche à optimiser le profil  $b(x)$  pour obtenir une contrainte uniforme dans la pièce en fonctionnement.

- 2.1. L'ensemble de la Fig. 3 tourne autour du point O avec une vitesse constante  $\omega$ . Le centre de gravité de la masse  $M$  est situé à une distance  $L_M$  de l'axe de rotation. Quelle est l'intensité de l'effort centrifuge  $F_M$  auquel est soumis la masse  $M$  ?
- 2.2. Dans le cas le plus général, comment s'appellent les composantes du torseur de cohésion en une section  $x$  quelconque du bras ?  
Lesquelles de ces composantes sont a priori nulles dans le cas de fonctionnement décrit ci-dessus ?
- 2.3. Quelle doit être la largeur  $b(L)$  de la section du bras la plus éloignée de l'axe de rotation, pour que l'effort  $F_M$ , supposé uniformément réparti, y génère une contrainte uniforme  $n_1 = c$  ?
- 2.4. Comment s'exprime la contrainte  $n_1$  dans une section quelconque, en fonction de l'effort normal  $N(x)$ , de la largeur locale du bras  $b(x)$  et de son épaisseur  $e$  ?
- 2.5. En déduire la variation élémentaire  $dN$  de l'effort normal en fonction d'une variation élémentaire  $db$  de la largeur du bras, lorsque  $n_1$  a une valeur constante égale à  $c$ .
- 2.6. Quel est l'effort centrifuge  $dF_C$  d'un tronçon élémentaire du bras, de longueur  $dx$  ?
- 2.7.  $N$  étant l'effort normal en  $x$  et  $N + dN$  l'effort normal en  $x + dx$ , utiliser le résultat de la question précédente pour exprimer la variation élémentaire  $dN$ .
- 2.8. En rapprochant les résultats des questions 2.5 et 2.7, écrire l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire  $b(x)$ .
- 2.9. Résoudre cette équation différentielle, prendre en compte la condition en  $x = L$  (question 2.3) et donner l'expression de  $b(x)$  qui permettra de réaliser un bras isocontrainte.

### 3. Flexions sur 2 appuis simples.

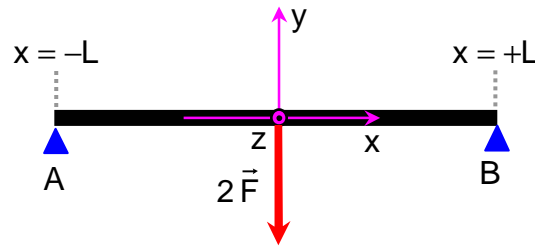


Fig. 4 : Flexion d'une poutre sous l'effet d'une force ponctuelle appliquée en son centre.

Une poutre droite longueur  $2L$  est posée sur des appuis simples en ses 2 extrémités, un effort  $2F$  transversal est appliqué ponctuellement en son centre (Fig. 4).

- 3.1. Quelle est la valeur du moment fléchissant le long de la poutre ?  
Tracer un graphique schématique représentant son évolution en fonction de  $x$ .
- 3.2. En quel point précis la contrainte due au moment fléchissant est-elle maximale et quelle est cette valeur maximale ?
- 3.3. La poutre possède une section en I normalisée, conforme au Tab. 1.  
Si  $L = 3$  m et  $F = 5000$  N, quel est le plus petit profil du Tab. 1 qui permet d'avoir une contrainte maximale inférieure à 100 MPa ?

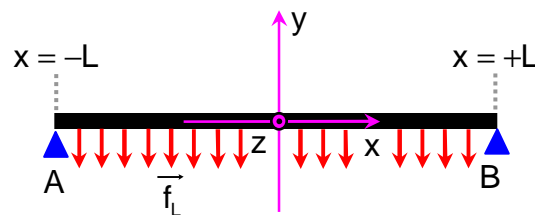


Fig. 5 : Flexion d'une poutre sous l'effet d'une force répartie sur toute sa longueur.

Une poutre semblable est maintenant soumise sur toute sa longueur à un effort uniformément réparti  $f_L = F/L$ , conformément à la Fig. 5.

- 3.4. Quelle est la valeur du moment fléchissant le long de la poutre ?  
Tracer un graphique schématique représentant son évolution en fonction de  $x$ .
- 3.5. En quel point précis la contrainte due au moment fléchissant est-elle maximale et quelle est cette valeur maximale ?
- 3.6. Si, comme précédemment,  $L = 3$  m et  $F = 5000$  N, quel est le plus petit profil du Tab. 1 qui permet d'avoir une contrainte maximale inférieure à 100 MPa ?

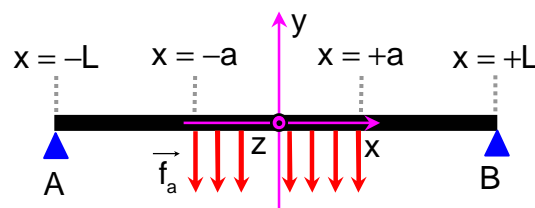


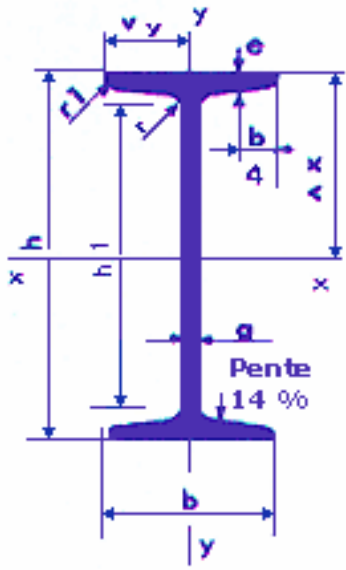
Fig. 6 : Flexion d'une poutre sous l'effet d'une force répartie sur une partie de sa longueur.

**CP46 – Automne 2008**  
**Sujet de l'Examen MEDIAN**  
**05/11/2008**

Une poutre semblable aux précédentes est maintenant soumise, dans sa zone centrale, entre  $x = -a$  et  $x = a$ , à un effort uniformément réparti  $f_a = F/a$ , conformément à la Fig. 6.

- 3.7. Quelle est la valeur du moment fléchissant le long de la poutre ?  
Tracer un graphique schématique représentant son évolution en fonction de  $x$ .
- 3.8. Donner l'expression du moment fléchissant maximum en fonction de  $a$ .  
Quelles valeurs prend-il pour  $a = 0$  et  $a = L$  ?
- 3.9. Conclure : si la même charge peut être répartie de différentes façons et si le critère de dimensionnement de la poutre est la contrainte maximale, quelle sera la valeur de  $a$  qui conduira à choisir la poutre de plus petite section, donc la moins chère ?

**IPN**  
**NF A 45209**



Profils	Poids kg/m	Dimensions mm							Section cm <sup>2</sup>	Moments d'inertie		Modules de résistance	
		h	b	a	r	e	r1	h1		I <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>x</sub> V <sub>x</sub> cm <sup>3</sup>	I <sub>y</sub> V <sub>y</sub> cm <sup>3</sup>
<b>80</b>	<b>5,95</b>	<b>80</b>	<b>42</b>	<b>3,9</b>	<b>5,9</b>	<b>2,3</b>	<b>59</b>	<b>7,58</b>	<b>77,8</b>	<b>6,29</b>	<b>19,5</b>	<b>3,00</b>	
<b>100</b>	<b>8,32</b>	<b>100</b>	<b>50</b>	<b>4,5</b>	<b>6,8</b>	<b>2,7</b>	<b>75</b>	<b>10,6</b>	<b>171</b>	<b>12,2</b>	<b>34,2</b>	<b>4,88</b>	
<b>120</b>	<b>11,2</b>	<b>120</b>	<b>58</b>	<b>5,1</b>	<b>7,7</b>	<b>3,1</b>	<b>92</b>	<b>14,2</b>	<b>328</b>	<b>21,5</b>	<b>54,7</b>	<b>7,41</b>	
<b>140</b>	<b>14,4</b>	<b>140</b>	<b>66</b>	<b>5,7</b>	<b>8,6</b>	<b>3,4</b>	<b>109</b>	<b>18,3</b>	<b>573</b>	<b>35,2</b>	<b>81,9</b>	<b>10,7</b>	
<b>160</b>	<b>17,9</b>	<b>160</b>	<b>74</b>	<b>6,3</b>	<b>9,5</b>	<b>3,8</b>	<b>125</b>	<b>22,8</b>	<b>935</b>	<b>54,7</b>	<b>117</b>	<b>14,8</b>	
<b>180</b>	<b>21,9</b>	<b>180</b>	<b>82</b>	<b>6,9</b>	<b>10,4</b>	<b>4,1</b>	<b>142</b>	<b>27,9</b>	<b>1450</b>	<b>81,3</b>	<b>161</b>	<b>19,8</b>	
<b>200</b>	<b>26,3</b>	<b>200</b>	<b>90</b>	<b>7,5</b>	<b>11,3</b>	<b>4,5</b>	<b>159</b>	<b>33,5</b>	<b>2140</b>	<b>117</b>	<b>214</b>	<b>26,0</b>	
<b>220</b>	<b>31,1</b>	<b>220</b>	<b>98</b>	<b>8,1</b>	<b>12,2</b>	<b>4,9</b>	<b>175</b>	<b>39,6</b>	<b>3060</b>	<b>162</b>	<b>278</b>	<b>33,1</b>	
<b>240</b>	<b>36,2</b>	<b>240</b>	<b>106</b>	<b>8,7</b>	<b>13,1</b>	<b>5,2</b>	<b>192</b>	<b>46,1</b>	<b>4250</b>	<b>221</b>	<b>354</b>	<b>41,7</b>	
<b>280</b>	<b>48,0</b>	<b>280</b>	<b>119</b>	<b>10,1</b>	<b>15,2</b>	<b>6,1</b>	<b>225</b>	<b>61,1</b>	<b>7590</b>	<b>364</b>	<b>542</b>	<b>61,2</b>	
<b>300</b>	<b>54,2</b>	<b>300</b>	<b>125</b>	<b>10,8</b>	<b>16,2</b>	<b>6,5</b>	<b>241</b>	<b>69,1</b>	<b>9800</b>	<b>451</b>	<b>653</b>	<b>72,2</b>	

Tab. 1 : Caractéristiques géométriques des sections IPN normalisées.