

3 exercices indépendants - Durée : 2 h - Documents autorisés

## 1. Trajectoires.

A l'instant  $t = 0$ , un projectile pesant est abandonné avec une vitesse initiale dans une zone munie d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Dans ce repère,

- les coordonnées du point de départ sont  $x_0, y_0$  et  $z_0$ ,
- les composantes du vecteur vitesse initiale sont  $V_{0x}, V_{0y}$  et  $V_{0z}$ .

Dans un premier temps, la zone considérée est située au voisinage de la surface de la Terre.

Toute masse  $y$  est donc soumise au champ de la pesanteur terrestre, c'est-à-dire à une accélération  $\vec{G}_T = -g \vec{k}$ .

1.1. Ecrire les équations décrivant la vitesse du projectile à un instant  $t > 0$  quelconque, sous la forme  $V_x(t) = \dots$  ;  $V_y(t) = \dots$  ;  $V_z(t) = \dots$ .

1.2. Ecrire les équations décrivant la trajectoire du projectile, sous la forme  $x(t) = \dots$  ;  $y(t) = \dots$  ;  $z(t) = \dots$ .

Dans un deuxième temps, l'expérience est répétée dans une zone étrange où on a découvert que le champ de pesanteur varie au cours du temps.

Toute masse  $y$  est soumise à l'accélération  $\vec{G}_E = -[g + h \sin(at)] \vec{k}$ , où  $h$  et  $a$  sont des constantes qui ont été mesurées.

1.3. Ecrire les équations décrivant la vitesse du projectile à un instant  $t > 0$  quelconque, sous la forme  $V_x(t) = \dots$  ;  $V_y(t) = \dots$  ;  $V_z(t) = \dots$ .

1.4. Ecrire les équations décrivant la trajectoire du projectile, sous la forme  $x(t) = \dots$  ;  $y(t) = \dots$  ;  $z(t) = \dots$ .

## 2. Les jumeaux téméraires.

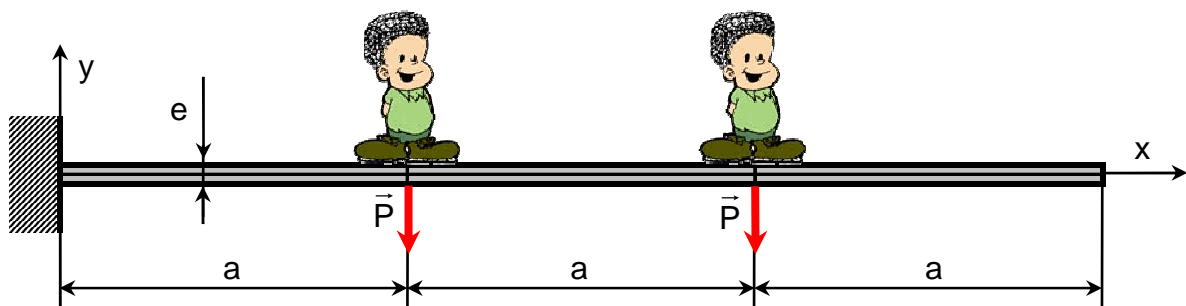


Fig. 1 : Toto et Titi prennent des risques.

Toto et Titi sont des frères jumeaux possédant le même poids.

Soucieux d'étudier une poutre en flexion, ils se sont aventurés sur une planche de section rectangulaire (d'épaisseur  $e$  et de largeur  $b$ ), constituée d'un matériau de module d'Young  $E$ , dont une extrémité est encastée dans un mur et dont l'autre est libre.

Ils se positionnent sur la planche et appliquent leurs poids ponctuellement au  $1/3$  et aux  $2/3$  de sa longueur, en  $x = a$  et  $x = 2a$  (Fig. 1).

**CP46 – Automne 2009**  
**Corrigé de l'Examen MEDIAN**  
**04/11/2009**

- 2.1. Quelle est la valeur de l'effort tranchant  $T_y$  le long de la poutre ?  
Tracer un graphique schématique représentant son évolution en fonction de  $x$ .
- 2.2. Quelle est la valeur du moment fléchissant  $M_z$  le long de la poutre ?  
Tracer un graphique schématique représentant son évolution en fonction de  $x$ .
- 2.3. Quelle est la formule qui définit le moment quadratique qui interviendra dans le calcul des contraintes dues au moment fléchissant  $M_z$  ?
- 2.4. Calculer le moment quadratique d'une section de la planche en fonction de ses dimensions, à partir de la formule demandée à la question précédente.
- 2.5. En quel point précis la contrainte due au moment fléchissant est-elle maximale et quelle est l'expression de cette valeur maximale en fonction de  $P$ ,  $a$ ,  $e$  et  $b$  ?
- 2.6. Une extrémité de la poutre est encastree.  
Qu'est-ce que cette donnée permet de dire sur le déplacement vertical  $V_y(0)$  et la rotation  $\omega_z(0)$  de la poutre en  $x = 0$  ?
- 2.7. Compte tenu de cette condition à l'encastrement et de l'expression du moment fléchissant  $M_z$  le long de la poutre entre  $x = 0$  et  $x = a$ , déterminer la rotation  $\omega_z(x)$  des sections de la poutre le long de ce tronçon, calculer en particulier  $\omega_z(a)$ .
- 2.8. Compte tenu de la condition à l'encastrement et du résultat de la question 2.7, déterminer le déplacement vertical  $V_y(x)$  des sections de la poutre entre  $x = 0$  et  $x = a$  (dû au moment fléchissant), calculer en particulier  $V_y(a)$ .
- 2.9. Compte tenu de la valeur  $\omega_z(a)$  calculée à la question 2.7 et de l'expression du moment fléchissant  $M_z$  le long de la poutre entre  $x = a$  et  $x = 2a$ , déterminer la rotation  $\omega_z(x)$  des sections de la poutre le long de ce tronçon, calculer en particulier  $\omega_z(2a)$ .
- 2.10. Compte tenu de la valeur  $V_y(a)$  calculée à la question 2.8 et du résultat de la question 2.9, déterminer le déplacement vertical  $V_y(x)$  des sections de la poutre entre  $x = a$  et  $x = 2a$  (dû au moment fléchissant), calculer en particulier  $V_y(2a)$ .
- 2.11. Compte tenu des valeurs de  $\omega_z(2a)$  et de  $V_y(2a)$  calculées aux question précédentes, déterminer le déplacement vertical  $V_y(x)$  des sections de la poutre entre  $x = 2a$  et  $x = 3a$ , calculer en particulier  $V_y(3a)$ , le déplacement vertical de l'extrémité libre de la planche (dû au moment fléchissant).

### 3. Faisabilité de l'ascenseur spatial.

L'ascenseur spatial est un concept de transport spatial entre la surface et l'orbite de la Terre.

Il se fonde sur l'idée d'un câble maintenu tendu par la force centrifuge due à la rotation de la Terre sur elle-même, voir la Fig. 2 [ 1 (Consulter "Ascenseur spatial) ].

Ce câble peut être considéré comme une poutre droite soumise à un effort normal qui résulte uniquement de la force centrifuge et de l'attraction de la Terre.

Il possède une section  $S$  et une masse volumique  $\rho$ .

La force centrifuge  $F_c$  subie par un corps de masse  $M$  en rotation autour d'un point à la vitesse  $\omega$  s'exprime par :  $F_c = MR \omega^2$  où  $R$  est la distance entre le centre de rotation et le centre de gravité du corps.

Cet effort est dirigé vers l'extérieur du cercle décrit.

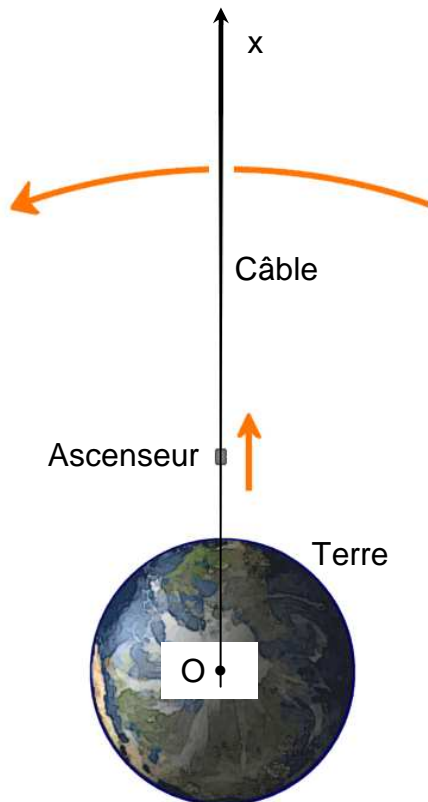


Fig. 2 : Principe de l'ascenseur spatial.

3.1. Le câble étant orienté par un axe Ox, où O (point pour lequel  $x = 0$ ) est le centre de la Terre, donner l'expression de l'effort centrifuge  $dF_C$  subi par un tronçon élémentaire de longueur  $dx$ .

La force d'attraction  $F_A$  qui s'exerce entre 2 corps de masses  $M_1$  et  $M_2$  s'exprime par  $F_A = G \frac{M_1 M_2}{R^2}$  où  $G$  est la constante de gravitation universelle et  $R$  la distance entre les centres de gravité des 2 corps.

3.2. Donner l'expression de la force d'attraction  $dF_A$  qui s'exerce entre la Terre, de masse  $M_T$ , et un tronçon élémentaire du câble, de longueur  $dx$ .

3.3. Ecrire l'équation qui traduit l'équilibre d'un tronçon élémentaire du câble et en déduire l'expression de la variation de l'effort normal  $dN$  quand on passe d'une section  $x$  à la section  $x + dx$ .

3.4. Quelle doit être la valeur de l'effort normal à l'extrémité libre du câble, en  $x = H$  ?

3.5. La question 3.3 ayant fourni la valeur de la dérivée  $\frac{dN}{dx}$  et la question 3.4 une condition en  $x = H$ , déterminer l'évolution de l'effort normal  $N(x)$  et de la contrainte normale  $n_1(x)$  le long du câble.

3.6. En fonction de la valeur de  $H$ , il peut arriver que de la contrainte normale  $n_1(x)$  passe par une valeur maximale  $n_{1max}$ .

Pour quelle valeur  $x_0$  de  $x$  cette contrainte maximale  $n_{1max}$  peut-elle être atteinte ?

Remarquer que  $x_0$  ne dépend pas de  $H$ , donc que  $n_1(x)$  passera par un maximum seulement si  $H > x_0$ .

3.7. Pour que le câble soit tendu sur toute sa longueur, il est nécessaire que l'effort normal  $y$  soit toujours positif, en particulier au niveau de la surface de la Terre, où  $x = R_T$  ( $R_T$  rayon de la Terre).

Quelle doit être la distance  $H_0$  entre l'extrémité libre du câble et le centre de la Terre pour que  $N(R_T) = 0$  ?

3.8. Application numérique : calculer  $x_0$ ,  $n_{1max}$  et  $H_0$  avec les données numériques ci-dessous.

$\omega = 1$  tour/jour ou  $7,27 \cdot 10^{-5}$  rd/s

$G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  m<sup>3</sup>/kg s<sup>2</sup> [ 1 (Consulter "Loi universelle de la gravitation") ]

$M_T = 5,97 \cdot 10^{24}$  kg

$R_T = 6,38 \cdot 10^6$  m [ 1 (Consulter "Terre") ]

$\rho = 116$  kg/m<sup>3</sup> si le câble est en tubes de carbone géants

[ 2 (Consulter "Specific strength") ]

**Références :**

**[ 1 ] - Wikipédia**

Bienvenue sur Wikipédia, l'encyclopédie libre et gratuite que chacun peut améliorer.

<http://fr.wikipedia.org/>

**[ 2 ] - Wikipedia**

Welcome to Wikipedia, the free encyclopedia that anyone can edit.

<http://en.wikipedia.org/>

**Eléments de réponses**

Question 1.1

Les équations décrivant la vitesse du projectile sont obtenues par intégration des composantes de l'accélération à laquelle il est soumis.

$$V_x(t) = V_{0x} \quad ; \quad V_y(t) = V_{0y} \quad ; \quad V_z(t) = -g t + V_{0z}$$

Question 1.2

Les équations décrivant la trajectoire du projectile sont obtenues par intégration des composantes de sa vitesse.

$$x(t) = V_{0z} t + x_0 \quad ; \quad y(t) = V_{0y} t + y_0 \quad ; \quad z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + V_{0z} t + z_0$$

Question 1.3

Les équations décrivant la vitesse du projectile sont obtenues par intégration des composantes de l'accélération à laquelle il est soumis.

$$V_x(t) = V_{0x} \quad ; \quad V_y(t) = V_{0y} \quad ; \quad V_z(t) = -g t + \frac{h}{a} \cos(at) - \frac{h}{a} + V_{0z}$$

Question 1.4

Les équations décrivant la trajectoire du projectile sont obtenues par intégration des composantes de sa vitesse.

$$x(t) = V_{0x} t + x_0 \quad ; \quad y(t) = V_{0y} t + y_0 \quad ; \quad z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + \frac{h}{a^2} \sin(at) + \left( V_{0z} - \frac{h}{a} \right) t + z_0$$

Question 2.1

L'effort tranchant  $T_y$  long de la poutre prend 3 valeurs constantes sur les 3 tronçons délimités par les points d'application des 2 efforts.

Tronçon 1 :  $0 \leq x \leq a$

$$T_y = -2 P$$

Tronçon 2 :  $a \leq x \leq 2 a$

$$T_y = -P$$

Tronçon 3 :  $2 a \leq x \leq 3 a$

$$T_y = 0$$

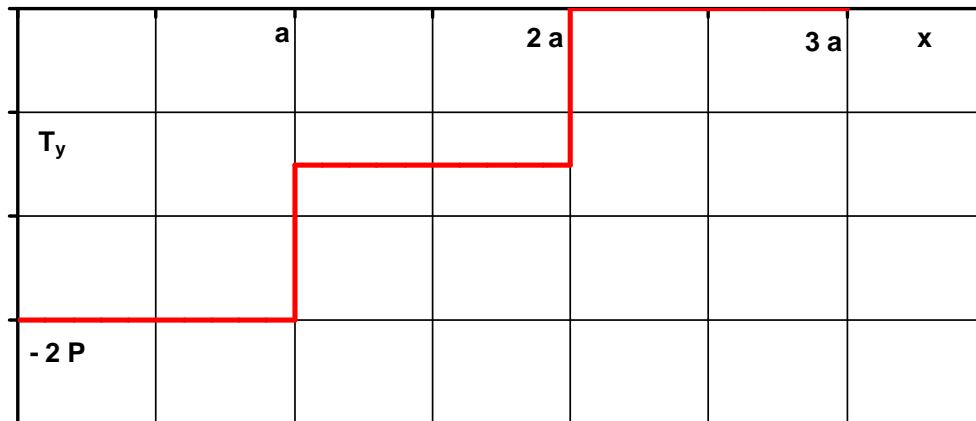


Fig. 3 : Evolution de l'effort tranchant  $T_y$  le long de la poutre.

Question 2.2

Le moment fléchissant  $M_z$  long de la poutre varie linéairement en fonction de  $x$  sur les 3 tronçons délimités par les points d'application des 2 efforts.

Tronçon 1 :  $0 \leq x \leq a$

$$M_z = -P(2a - x) - P(a - x)$$

$$M_z = -P(3a - 2x)$$

Tronçon 2 :  $a \leq x \leq 2a$

$$M_z = -P(2a - x)$$

Tronçon 3 :  $2a \leq x \leq 3a$

$$M_z = 0$$

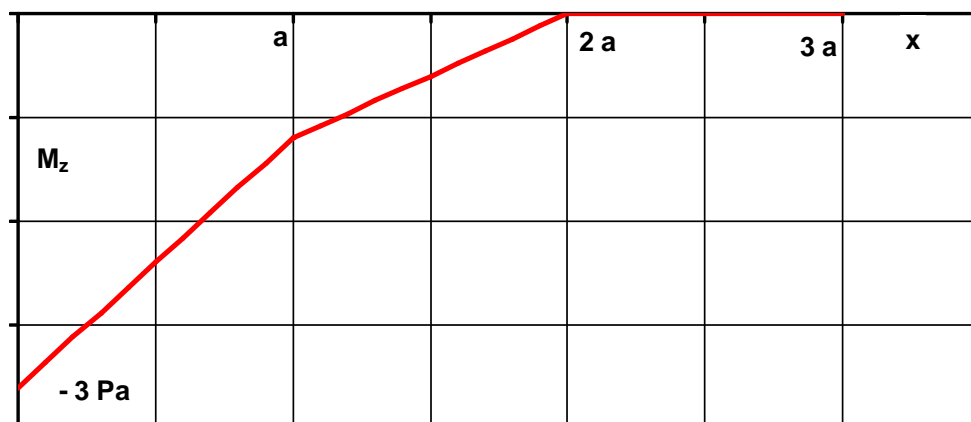


Fig. 4 : Evolution du moment fléchissant  $M_z$  long de la poutre.

Question 2.3

Le moment quadratique  $I_z$  qui interviendra dans le calcul des contraintes dues au moment fléchissant  $M_z$ , dans la section S de la poutre, est défini par :

$$I_z = \iint_S y^2 dS$$

Question 2.4

Application de la formule ci-dessus à une section rectangulaire.

$$I_z = \frac{b e^3}{12}$$

Question 2.5

Le moment fléchissant est maximum, en valeur absolue, à l'encastrement, en  $x = 0$ , et vaut :  $M_{z_{\max}} = -3 P a$ .

Dans toute section de la poutre, le moment fléchissant génère des contraintes normales  $n_1$ . Ces contraintes ne dépendent pas de  $z$  et sont proportionnelles à  $y$ .

$$n_1 = -\frac{M_z y}{I_z}$$

En particulier, dans la section  $x = 0$  :

$$n_1 = -\frac{M_{z_{\max}} y}{I_z}$$

La valeur maximale de cette contrainte est atteinte sur le bord supérieur de la poutre, pour  $y = \frac{e}{2}$ .

$$n_{1_{\max}} = \frac{18 P a}{b e^2}$$

Question 2.6

L'encastrement en  $x = 0$  implique que la rotation de cette section et son déplacement sont nuls.

$$\omega_z(0) = 0 \quad ; \quad V_y(0) = 0$$

Question 2.7

La rotation des sections de la poutre est déduite de l'équation différentielle  $\frac{d^2 V_y(x)}{dx^2} = \frac{M_z}{E I_z}$ ,

qui s'écrit aussi  $\frac{d\omega_z(x)}{dx} = \frac{M_z}{E I_z}$ .

En tenant compte de l'expression de  $M_z$  sur le tronçon 1 ( $0 \leq x \leq a$ ) :

$$\frac{d\omega_z(x)}{dx} = -\frac{P}{E I_z} (3 a - 2 x)$$

Intégration :  $\omega_z(x) = -\frac{P}{E I_z} (3 a x - x^2) + c_1$ , où  $c_1$  est une constante d'intégration.

$\omega_z(0) = 0$  implique  $c_1 = 0$ .

$$\omega_z(x) = -\frac{P}{EI_z} (3ax - x^2)$$

$$\omega_z(a) = -\frac{2Pa^2}{EI_z}$$

Question 2.8

Le résultat de la question précédente s'écrit aussi :  $\frac{dV_y(x)}{dx} = -\frac{P}{EI_z} (3ax - x^2)$

Intégration :  $V_y(x) = -\frac{P}{EI_z} \left( \frac{3}{2}ax^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) + c_2$  où  $c_2$  est une constante d'intégration.

$V_y(0) = 0$  implique  $c_2 = 0$ .

$$V_y(x) = -\frac{P}{EI_z} \left( \frac{3}{2}ax^2 - \frac{1}{3}x^3 \right)$$

$$V_y(a) = -\frac{7Pa^3}{6EI_z}$$

Question 2.9

Compte-tenu de l'expression de  $M_z$  sur le tronçon 2 ( $a \leq x \leq 2a$ ) :

$$\frac{d\omega_z(x)}{dx} = -\frac{P}{EI_z} (2a - x)$$

Intégration :  $\omega_z(x) = -\frac{P}{EI_z} \left( 2ax - \frac{1}{2}x^2 \right) + c_3$ , où  $c_3$  est une constante d'intégration.

$$\omega_z(a) = -\frac{2Pa^2}{EI_z} \text{ implique } c_3 = -\frac{Pa^2}{2EI_z}.$$

$$\omega_z(x) = -\frac{P}{EI_z} \left( \frac{1}{2}a^2 + 2ax - \frac{1}{2}x^2 \right)$$

$$\omega_z(2a) = -\frac{5Pa^2}{2EI_z}$$

Question 2.10

Le résultat de la question précédente s'écrit aussi :  $\frac{dV_y(x)}{dx} = -\frac{P}{EI_z} \left( \frac{1}{2}a^2 + 2ax - \frac{1}{2}x^2 \right)$

Intégration :  $V_y(x) = -\frac{P}{EI_z} \left( \frac{1}{2}a^2x + ax^2 - \frac{1}{6}x^3 \right) + c_4$  où  $c_4$  est une constante d'intégration.

$$V_y(a) = -\frac{7Pa^3}{6EI_z} \text{ implique } c_4 = -\frac{Pa^6}{6EI_z}.$$

$$V_y(x) = -\frac{P}{EI_z} \left( -\frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{2}a^2x + ax^2 - \frac{1}{6}x^3 \right)$$

$$V_y(2a) = -\frac{7Pa^3}{2EI_z}$$

Question 2.11

$M_z$  est nul sur le tronçon 3 ( $2a \leq x \leq 3a$ ) :

$$\frac{d\omega_z(x)}{dx} = 0$$

Intégration :  $\omega_z(x) = c_5$ , où  $c_5$  est une constante d'intégration.

**CP46 – Automne 2009**  
**Corrigé de l'Examen MEDIAN**  
**04/11/2009**

$$\omega_z(2a) = -\frac{5Pa^2}{2EI_z} \text{ implique } c_5 = -\frac{5Pa^2}{2EI_z}.$$

$$\frac{dV_y(x)}{dx} = -\frac{5Pa^2}{2EI_z}$$

Intégration :  $V_y(x) = -\frac{5Pa^2}{2EI_z}x + c_6$  où  $c_6$  est une constante d'intégration.

$$V_y(2a) = -\frac{7Pa^3}{2EI_z} \text{ implique } c_6 = \frac{3Pa^3}{2EI_z}.$$

$$V_y(x) = -\frac{Pa^2}{2EI_z}(-3a + 5x)$$

$$V_y(3a) = -\frac{6Pa^3}{EI_z}$$

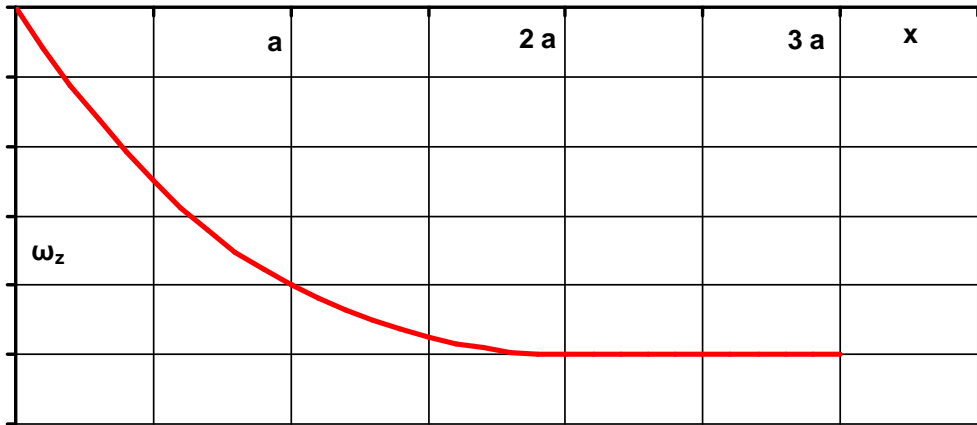


Fig. 5 : Evolution, le long de la poutre, de la rotation des sections, ou pente de la déformée.

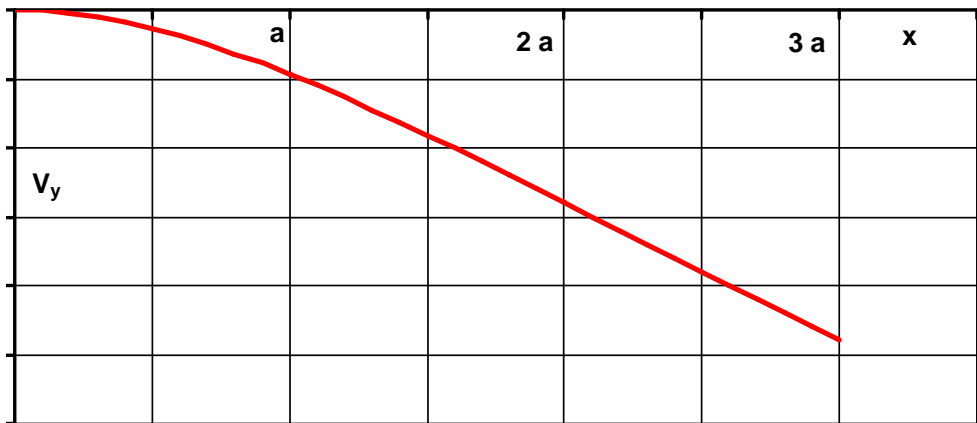


Fig. 6 : Evolution du déplacement vertical des sections, le long de la poutre.



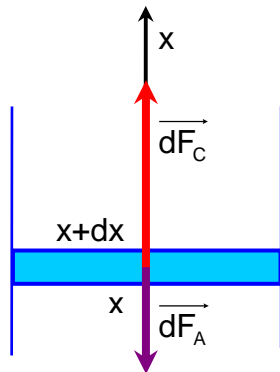


Fig. 7 : Effort centrifuge et attraction terrestre sur un tronçon élémentaire.

Question 3.1

Volume d'un tronçon élémentaire du câble :

$$dV = S dx$$

D'où l'effort centrifuge qui y apparaît, compte tenu de la masse volumique et de la vitesse de rotation :

$$dF_C = \rho x \omega^2 S dx$$

Question 3.2

Force d'attraction sur un tronçon élémentaire du câble :

$$dF_A = -\frac{G M_T \rho S}{x^2} dx$$

Question 3.3

Equation traduisant l'équilibre d'un tronçon (Fig. 7) :

$$N(x + dx) - N(x) + dF_C + dF_A = 0$$

$$dN = -dF_A - dF_C$$

$$dN = \rho S \left( \frac{G M_T}{x^2} - x \omega^2 \right) dx$$

Question 3.4

A l'extrémité libre, l'effort normal est nul.

$$N(H) = 0$$

Question 3.5

Intégration de l'équation de la question 3.3 en tenant compte de la condition de la question 3.4.

$$N(x) = \rho S \left[ G M_T \left( \frac{1}{H} - \frac{1}{x} \right) + \frac{\omega^2}{2} (H^2 - x^2) \right]$$

$$n_1(x) = \frac{N(x)}{S}$$

$$n_1(x) = \rho \left[ G M_T \left( \frac{1}{H} - \frac{1}{x} \right) + \frac{\omega^2}{2} (H^2 - x^2) \right]$$

Question 3.6

Si la fonction  $n_1(x)$  passe par un maximum, sa dérivée s'annulera en ce point.

$$\frac{dn_1}{dx} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dN}{dx} = 0$$

L'expression de  $\frac{dN}{dx}$  étant connue (question 3.3),  $x_0$  doit satisfaire à :  $\frac{GM_T}{x_0^2} - x_0\omega^2 = 0$

$$x_0 = \sqrt[3]{\frac{GM_T}{\omega^2}}$$

**Question 3.7**

Il suffit d'appliquer la formule trouvée à la question 3.5.

$$N(R_T) = \rho S \left[ GM_T \left( \frac{1}{H_0} - \frac{1}{R_T} \right) + \frac{\omega^2}{2} (H_0^2 - R_T^2) \right]$$

La condition  $N(R_T) = 0$  conduit à une équation en  $H_0$ .

$$H_0^2 + H_0 R_T - \frac{2GM_T}{R_T\omega^2} = 0$$

$$H_0 = \frac{R_T}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{8GM_T}{R_T^3\omega^2}} \right]$$

**Question 3.8**

$$x_0 = 4,22 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Remarque :  $x_0 - R_T = 35\,800 \text{ km}$  est l'altitude de l'orbite géostationnaire, où l'attraction terrestre équilibre exactement la force centrifuge qui s'exerce sur un satellite.

$$n_{1\max} = 5,61 \cdot 10^9 \text{ Pa}$$

Remarque : d'après [ 2 (Consulter "Specific strength") ], la limite de rupture des tubes de carbone géants ("colossal carbon tube" en anglais) est de 6 900 MPa et ce nouveau matériau pourrait un jour permettre de réaliser un ascenseur spatial.

$$H_0 = 1,50 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Remarque : la longueur du câble depuis la surface de la Terre doit donc être de 144 000 km ( $H_0 - R_T$ ), soit 3,6 fois le périmètre équatorial terrestre, qui est de 40 075 km [ 1 (Consulter "Terre") ], ou 0,37 fois la distance maximale du centre de la Terre au centre de la Lune, qui est de 384 400 km [ 1 (Consulter "Lune") ].

Complément : Les Fig. 8, Fig. 9 et Fig. 10, illustrent les évolutions de  $n_1(x)$  pour différentes valeurs de  $H$ .

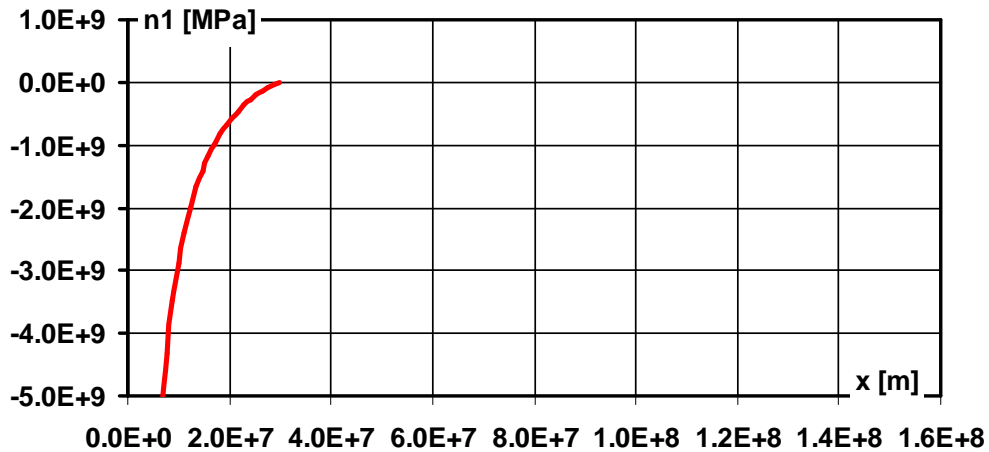


Fig. 8 : Evolution de  $n_1(x)$  pour une valeur arbitraire de  $H = 3.10^7$  m.  
 $n_1(x)$  étant partout négatif, le câble, sans rigidité en compression, ne pourrait pas tenir vertical.

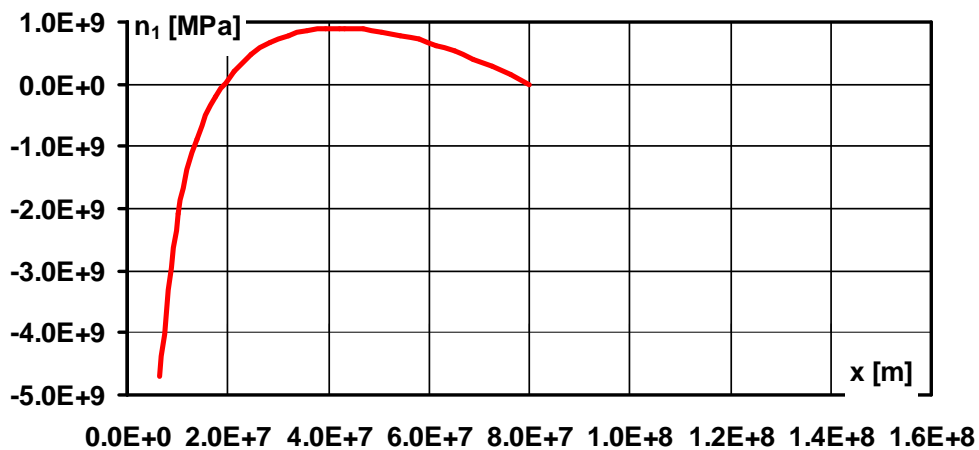


Fig. 9 : Evolution de  $n_1(x)$  pour une valeur arbitraire de  $H = 8.10^7$  m.  
 $n_1(x)$  étant encore localement négatif, le câble, sans rigidité en compression, ne pourrait toujours pas tenir vertical.

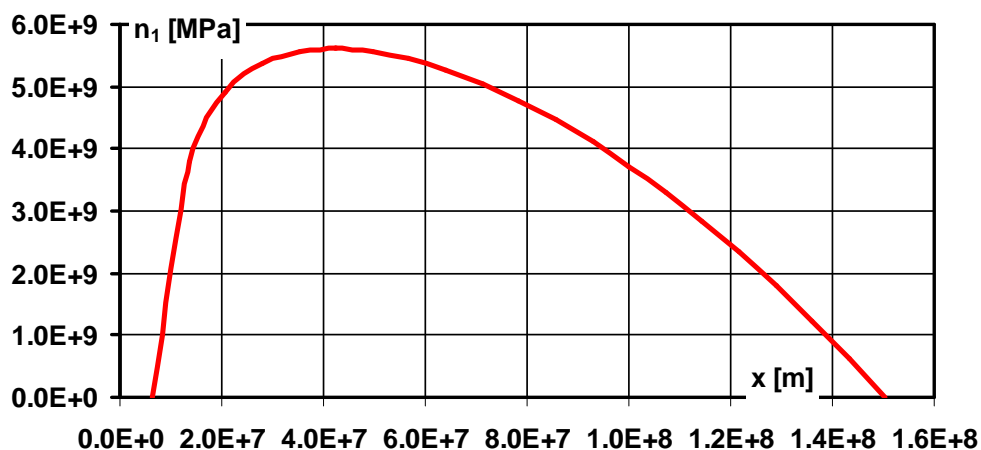


Fig. 10 : Evolution de  $n_1(x)$  pour la valeur optimisée de  $H$ ,  $H_0 = 1,50.10^8$  m.  
 $n_1(x)$  étant partout positif, le câble est en équilibre vertical.