CP46 – Automne 2009
Sujet de l'Examen MEDIAN
04/11/2009

3 exercices indépendants - Durée : 2 h - Documents autorisés

Conseils et consignes :
- Lire l'énoncé.
- Respecter les notations de l'énoncé.
- Identifier les questions.
- Encadrer les résultats.
- Numéroter les feuilles (1 feuille = 4 pages) en indiquant le nombre total de feuilles (Exemple : 1/3, 2/3, 3/3).

1. Trajectoires.

A l'instant t = 0, un projectile pesant est abandonné avec une vitesse initiale dans une zone munie d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Dans ce repère,
- les coordonnées du point de départ sont x_0, y_0 et z_0,
- les composantes du vecteur vitesse initiale sont V_{0x}, V_{0y} et V_{0z}.

Dans un premier temps, la zone considérée est située au voisinage de la surface de la Terre.
Toute masse y est donc soumise au champ de la pesanteur terrestre, c'est-à-dire à une accélération $\overrightarrow{G_T} = -g\,\vec{k}$.

1.1. Ecrire les équations décrivant la vitesse du projectile à un instant t > 0 quelconque, sous la forme $V_x(t) = \dots$; $V_y(t) = \dots$; $V_z(t) = \dots$.

1.2. Ecrire les équations décrivant la trajectoire du projectile, sous la forme $x(t) = \dots$; $y(t) = \dots$; $z(t) = \dots$.

Dans un deuxième temps, l'expérience est répétée dans une zone étrange où on a découvert que le champ de pesanteur varie au cours du temps.
Toute masse y est soumise à l'accélération $\overrightarrow{G_E} = -\left[g + h\sin(at) \right]\vec{k}$, où h et a sont des constantes qui ont été mesurées.

1.3. Ecrire les équations décrivant la vitesse du projectile à un instant t > 0 quelconque, sous la forme $V_x(t) = \dots$; $V_y(t) = \dots$; $V_z(t) = \dots$.

1.4. Ecrire les équations décrivant la trajectoire du projectile, sous la forme $x(t) = \dots$; $y(t) = \dots$; $z(t) = \dots$.

2. Les jumeaux téméraires.

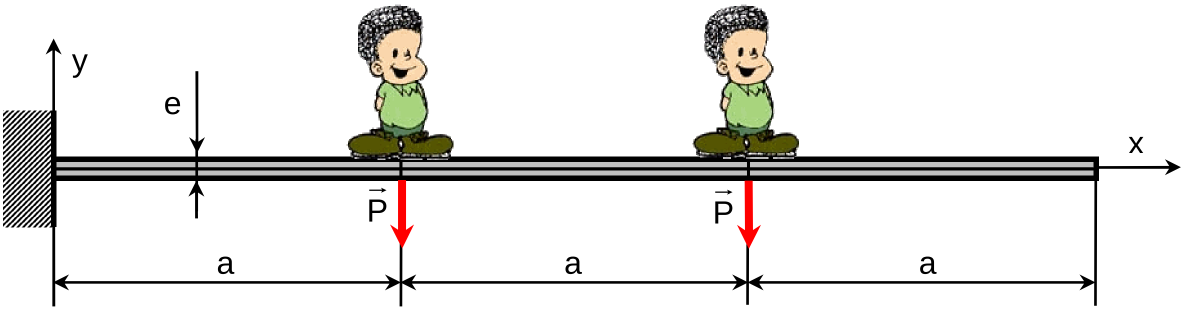

Fig. 1 : Toto et Titi prennent des risques.

Toto et Titi sont des frères jumeaux possédant le même poids.
Soucieux d'étudier une poutre en flexion, ils se sont aventurés sur une planche dont une extrémité est encastrée dans un mur et dont l'autre est libre.
Ils se positionnent sur la planche et appliquent leurs poids ponctuellement au 1/3 et aux 2/3 de sa longueur, en $x = a$ et $x = 2a$ (Fig. 1).

2.1. Quelle est la valeur de l'effort tranchant T_y le long de la poutre ?
Tracer un graphique schématique représentant son évolution en fonction de x.

2.2. Quelle est la valeur du moment fléchissant M_z le long de la poutre ?
Tracer un graphique schématique représentant son évolution en fonction de x.

2.3. Quelle est la formule qui définit le moment quadratique qui interviendra dans le calcul des contraintes dues au moment fléchissant M_z ?

2.4. La section de la planche étant rectangulaire, d'épaisseur e (Fig. 1) et de largeur b, calculer ce moment quadratique en fonction de ces dimensions, à partir de la formule demandée à la question précédente.

2.5. En quel point précis la contrainte due au moment fléchissant est-elle maximale et quelle est l'expression de cette valeur maximale en fonction de P, a, e et b ?

2.6. Une extrémité de la poutre est encastrée.
Qu'est-ce que cette donnée permet de dire sur le déplacement vertical $V_y(0)$ et la rotation $\omega_z(0)$ de la poutre en $x = 0$?

2.7. Compte tenu de cette condition à l'encastrement et de l'expression du moment fléchissant M_z le long de la poutre entre $x = 0$ et $x = a$, déterminer la rotation $\omega_z(x)$ des sections de la poutre le long de ce tronçon, calculer en particulier $\omega_z(a)$.

2.8. Compte tenu de la condition à l'encastrement et du résultat de la question 2.7, déterminer le déplacement vertical $V_y(x)$ des sections de la poutre entre $x = 0$ et $x = a$ (dû au moment fléchissant), calculer en particulier $V_y(a)$.

2.9. Compte tenu de la valeur $\omega_z(a)$ calculée à la question 2.7 et de l'expression du moment fléchissant M_z le long de la poutre entre $x = a$ et $x = 2a$, déterminer la rotation $\omega_z(x)$ des sections de la poutre le long de ce tronçon, calculer en particulier $\omega_z(2a)$.

2.10. Compte tenu de la valeur $V_y(a)$ calculée à la question 2.8 et du résultat de la question 2.9, déterminer le déplacement vertical $V_y(x)$ des sections de la poutre entre $x = a$ et $x = 2a$ (dû au moment fléchissant), calculer en particulier $V_y(2a)$.

2.11. Compte tenu des valeurs de $\omega_z(2a)$ et de $V_y(2a)$ calculées aux question précédentes, déterminer le déplacement vertical $V_y(x)$ des sections de la poutre entre $x = 2a$ et $x = 3a$, calculer en particulier $V_y(3a)$, le déplacement vertical de l'extrémité libre de la planche (dû au moment fléchissant).

3. Faisabilité de l'ascenseur spatial.

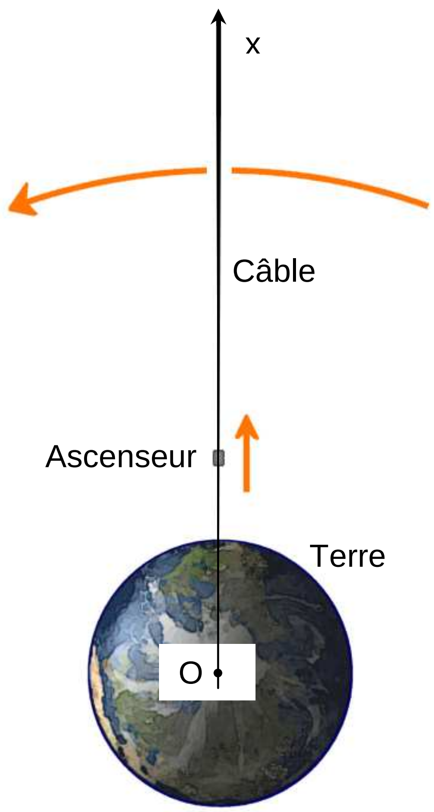

Fig. 2 : Principe de l'ascenseur spatial.

L'ascenseur spatial est un concept de transport spatial entre la surface et l'orbite de la Terre.
Il se fonde sur l'idée d'un câble maintenu tendu par la force centrifuge due à la rotation de la Terre sur elle-même (Fig. 2).
Ce câble, qui possède une section S et une masse volumique ρ, peut être considéré comme une poutre droite soumise à un effort normal qui résulte uniquement de la force centrifuge et de l'attraction de la Terre.

La force centrifuge F_C subie par un corps de masse M en rotation autour d'un point à la vitesse ω s'exprime par : $F_C = M\,R\,\omega^2$ où R est la distance entre le centre de rotation et le centre de gravité du corps. Cet effort est dirigé vers l'extérieur du cercle décrit.

3.1. Le câble étant orienté par un axe Ox, où O (point pour lequel $x = 0$) est le centre de la Terre, donner l'expression de l'effort centrifuge dF_C subi par un tronçon élémentaire de longueur dx.

La force d'attraction F_A qui s'exerce entre 2 corps de masses M_1 et M_2 s'exprime par $F_A = G\,\dfrac{M_1\,M_2}{R^2}$ où G est la constante de gravitation universelle et R la distance entre les centres de gravité des 2 corps.

3.2. Donner l'expression de la force d'attraction dF_A qui s'exerce entre la Terre, de masse M_T, et un tronçon élémentaire du câble, de longueur dx.

3.3. Ecrire l'équation qui traduit l'équilibre d'un tronçon élémentaire du câble et en déduire l'expression de la variation de l'effort normal dN quand on passe d'une section x à la section x + dx.

3.4. Quelle doit être la valeur de l'effort normal à l'extrémité libre du câble, en x = H ?

3.5. La question 3.3 ayant fourni la valeur de la dérivée $\dfrac{dN}{dx}$ et la question 3.4 une condition en $x = H$, déterminer l'évolution de l'effort normal N(x) et de la contrainte normale $n_1(x)$ le long du câble.

3.6. En fonction de la valeur de H, il peut arriver que de la contrainte normale $n_1(x)$ passe par une valeur maximale n_{1max}.
Pour quelle valeur x_0 de x cette contrainte maximale n_{1max} peut-elle être atteinte ?
Remarquer que x_0 ne dépend pas de H, donc que $n_1(x)$ passera par un maximum seulement si $H > x_0$.

3.7. Pour que le câble soit tendu sur toute sa longueur, il est nécessaire que l'effort normal y soit toujours positif, en particulier au niveau de la surface de la Terre, où $x = R_T$ (R_T rayon de la Terre).
Quelle doit être la distance H_0 entre l'extrémité libre du câble et le centre de la Terre pour que $N(R_T) = 0$?

3.8. Application numérique : calculer x_0, n_{1max} et H_0 avec les données numériques ci-dessous.
ω = 1 tour/jour ou $7,27.10^{-5}$ rd/s
$G = 6,67.10^{-11}\ m^3/kg\,s^2$
$M_T = 5,97.10^{24}$ kg
$R_T = 6,38.10^{6}$ m
$\rho = 116\ kg/m^3$