

3 exercices indépendants - Durée : 2 h - Documents autorisés

**Conseils et consignes :**

- Lire l'énoncé.
- Respecter les notations de l'énoncé.
- Identifier les questions.
- Encadrer les résultats.
- Numéroté les feuilles (1 feuille = 4 pages) en indiquant le nombre total de feuilles (Exemple : 1/3, 2/3, 3/3).

**1. Contraintes locales.**

Une base  $B' (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  est déduite d'une autre base  $B (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  par une rotation d'angle  $\alpha$  autour de l'axe  $\vec{e}_2$ .

- 1.1. Quelles sont les coordonnées des vecteurs  $\vec{e}'_1$ ,  $\vec{e}'_2$  et  $\vec{e}'_3$  dans la base  $B$  ?
- 1.2. En déduire la matrice de passage ( $P$ ) de la base  $B$  à la base  $B'$ .

Donner les valeurs des coefficients de cette matrice pour  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ .

En un point  $M$  d'un matériau contraint, les 3 vecteurs contraintes  $\vec{\sigma}_i$  s'exerçant sur les 3 facettes orientées par les vecteurs  $\vec{e}_i$  sont :

$$\begin{cases} \vec{\sigma}_1 = 100 \vec{e}_1 - 100\sqrt{3} \vec{e}_3 \\ \vec{\sigma}_2 = 100 \vec{e}_2 \\ \vec{\sigma}_3 = -100\sqrt{3} \vec{e}_1 - 100 \vec{e}_3 \end{cases} \quad (\text{les coordonnées sont exprimées en MPa})$$

- 1.3. Ecrire la matrice des contraintes au point  $M$  dans la base  $B$ .
- 1.4. Déterminer la matrice des contraintes au point  $M$  dans la base  $B'$  déduite de la base  $B$  par une rotation d'angle  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  autour de l'axe  $\vec{e}_2$ .
- 1.5. Quelles sont, en MPa, les valeurs des 3 contraintes principales au point  $M$  ?
- 1.6. Le matériau est de l'acier, il est élastique linéaire isotrope, avec un module d'Young de 200 GPa et un coefficient de Poisson de 0,3.  
Quelles sont les valeurs numériques des 6 composantes indépendantes du tenseur des déformations dans la base  $B'$  ?

## 2. La barre suspendue.

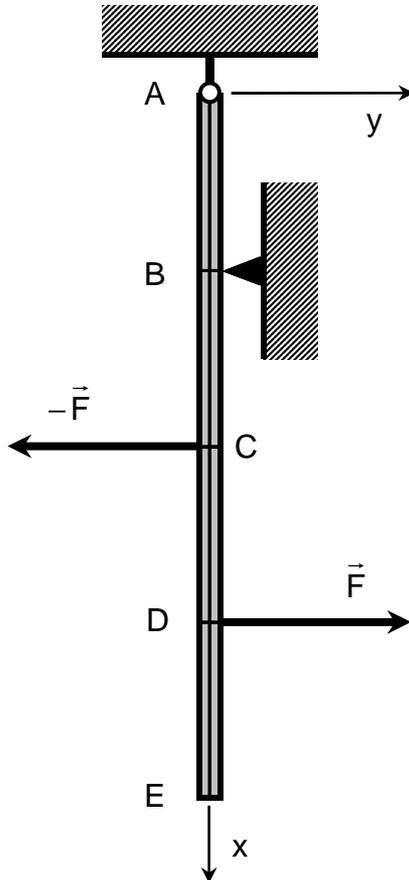


Fig. 1 : La barre et les conditions imposées.

Une barre rectiligne AE de longueur  $4a$  est suspendue par son extrémité A à une rotule et au contact d'un appui simple en son point B (Fig. 1). Les efforts  $-\vec{F}$  et  $\vec{F}$  sont appliqués respectivement aux points C et D, perpendiculairement à l'axe de la barre.

Conformément à la Fig. 1, la barre est munie d'un repère (A, x, y, z).

Les 4 segments AB, BC, CD et DE ont la même longueur  $a$ .

2.1. Le poids de la barre étant considéré comme négligeable par rapport aux efforts appliqués, écrire les équations qui traduisent l'équilibre de la barre et en déduire l'effort exercé par l'appui simple au point B.

2.2. Quelle est l'évolution du moment fléchissant  $M_z$  le long de la barre, entre  $x = 0$  et  $x = 4a$  ? Donner son expression en tout point et tracer la courbe  $M_z(x)$ .

2.3. A partir de sa définition, calculer le moment d'inertie polaire  $I_G$  d'une section de la barre, qui est circulaire pleine de rayon R.

2.4. En déduire de façon simple le moment quadratique  $I_z$  de cette section par rapport à son axe Gz (G est le centre de gravité de la section).

2.5. En tout point x de la barre, s'il existe un moment fléchissant  $M_z(x)$ , il génère des contraintes.

Quels sont les points de la barre où ces contraintes sont minimales et maximales ? Donner les coordonnées x, y et z de l'ensemble de ces points.

2.6. Quelles sont les expressions de ces contraintes minimale et maximale, en fonction de F, R et a uniquement ?

2.7. Quel effort  $\vec{F}'$  faudrait-il appliquer au point E dans la direction x pour que les contraintes dans la barre soient partout positives ?

### 3. Jojo le singe s'accroche à la poutre.

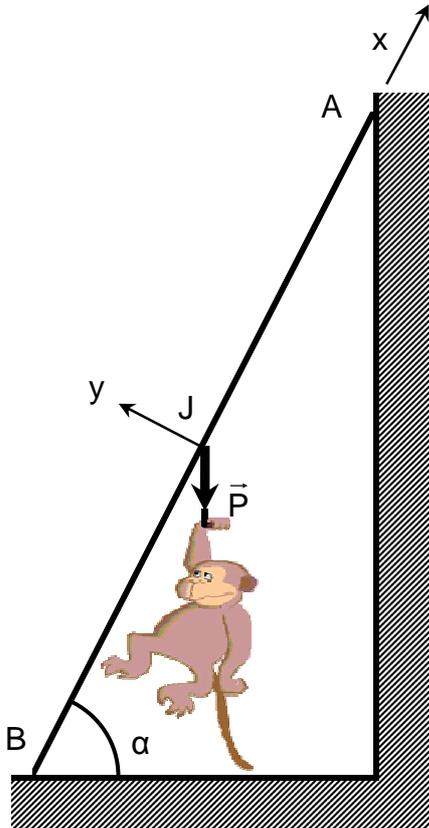


Fig. 2 : Jojo le singe accroché à la poutre.

Une poutre BA de longueur  $2L$  est appuyée contre un mur vertical et posée sur le sol horizontal avec lequel elle fait un angle  $\alpha$  (Fig. 2).

Le coefficient de frottement de la poutre sur le mur, au point A, est nul.

Jojo s'est accroché au point J, centre de la poutre, en  $x = 0$ , et son poids  $\bar{P}$  s'applique verticalement en ce point.

Le poids de la poutre est négligeable par rapport à celui de Jojo.

- 3.1. Ecrire les équations d'équilibre de la poutre en faisant intervenir les réactions du mur au point A et du sol au point B.
- 3.2. En déduire la valeur de ces réactions exercées par le sol et le mur sur la poutre.
- 3.3. Quel doit être, en fonction de l'angle  $\alpha$ , le coefficient de frottement minimum, au point B, pour qu'elle ne glisse pas ?
- 3.4. Donner l'expression de l'effort normal  $N(x)$  le long de la poutre, entre  $x = -L$  et  $x = L$  et tracer un graphique schématique de son évolution en fonction de  $x$ .
- 3.5. Donner l'expression de l'effort tranchant  $T_y(x)$  le long de la poutre, entre  $x = -L$  et  $x = L$  et tracer un graphique schématique de son évolution en fonction de  $x$ .
- 3.6. Donner l'expression du moment fléchissant  $M_z(x)$  le long de la poutre, entre  $x = -L$  et  $x = L$  et tracer un graphique schématique de son évolution en fonction de  $x$ .
- 3.7. Constater que l'évolution du moment fléchissant est symétrique par rapport au point J, centre de la poutre, ou que la fonction  $M_z(x)$  est paire, et en tirer une information concernant la rotation  $\omega_z(0)$  de la section de la poutre au point J.
- 3.8. A partir de l'expression de  $M_z(x)$  entre  $x = 0$  et  $x = L$ , en tenant compte de la condition en  $x = 0$  trouvée à la question précédente, et en faisant intervenir le module d'Young  $E$  du matériau ainsi que le moment quadratique  $I_z$  de la section, donner l'expression de la rotation  $\omega_z(x)$  des sections de la poutre entre J et A.
- 3.9. Calculer la flèche prise par la poutre (c'est-à-dire le déplacement de son centre J dans la direction  $y$ ) sous l'effet du moment fléchissant, et donner son expression en fonction de  $P$ ,  $L$ ,  $\alpha$ ,  $E$  et  $I_z$ .
- 3.10. Calculer numériquement la flèche de la poutre avec :
 

$P = 600 \text{ N}$	$L = 2 \text{ m}$	$\alpha = \frac{\pi}{3}$	$E = 10 \text{ GPa}$	$I_z = 50 \text{ cm}^4$
---------------------	-------------------	--------------------------	----------------------	-------------------------

## Éléments de réponses

### Question 1.1

Avec éventuellement l'aide d'un croquis.

$$\vec{e}'_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ -\sin \alpha \end{pmatrix} \quad \vec{e}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}'_3 = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

### Question 1.2

Découle de la définition de la matrice de passage.

$$(P) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{Pour } \alpha = \frac{\pi}{3} : (P) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Question 1.3

Découle de la définition de la matrice des contraintes.

$$(\sigma) = 100 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

### Question 1.4

Application de la formule de changement de base des matrices.

$$(\sigma') = {}^T(P)(\sigma)(P)$$

$$(\sigma') = \frac{100}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\sigma') = 100 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

### Question 1.5

Diagonalisation de la matrice  $(\sigma)$  ou  $(\sigma')$ , indifféremment.

$\sigma$  est valeur propre s'il existe des vecteurs  $\vec{u}$  tels que :

$$(\sigma)\vec{u} = \sigma\vec{u} \quad \text{ou} \quad (\sigma')\vec{u} = \sigma\vec{u}$$

Le système de 3 équations à 3 inconnues qui en découle est indéterminé si son déterminant est nul :

$$\begin{vmatrix} 100 - \sigma & 0 & \pm 100\sqrt{3} \\ 0 & 100 - \sigma & 0 \\ \pm 100\sqrt{3} & 0 & -100 - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$-(100 + \sigma)(100 - \sigma)^2 - 30000(100 - \sigma) = 0$$

On dit aussi que les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique de la matrice (1<sup>er</sup> membre de l'équation ci-dessus).

Les valeurs de ces 3 racines  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  sont les suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 200 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 100 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = -200 \text{ MPa} \end{cases}$$

Complément : matrice des contraintes ( $\sigma''$ ) au point M dans la base B'' déduite de la base

B par une rotation d'angle  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  autour de l'axe  $\vec{e}_2$ .

$$(\sigma'') = \frac{100}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$(\sigma'') = 100 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est diagonale, les coefficients de sa diagonale sont les contraintes principales et les vecteurs de la base B'' sont les directions principales des contraintes.

### Question 1.6

D'après la loi de Hooke, en tenant compte des contraintes calculées dans la base B'.

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ 0 \\ \sigma_{13} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \gamma_{ij} = 2 \epsilon_{ij} \quad \text{et} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = 100 \text{ MPa} & \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{22} = 100 \text{ MPa} & \sigma_{13} = 100 \sqrt{3} \text{ MPa} \\ \sigma_{33} = -100 \text{ MPa} & \sigma_{23} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = 0,5 \cdot 10^{-3} & \epsilon_{12} = 0 \\ \epsilon_{22} = 0,5 \cdot 10^{-3} & \epsilon_{13} = 1,13 \cdot 10^{-3} \\ \epsilon_{33} = -0,8 \cdot 10^{-3} & \epsilon_{23} = 0 \end{cases}$$

### Question 2.1

La Fig. 3 reproduit la barre avec les efforts inconnus dus aux liaisons, orientés arbitrairement dans le sens positif, en x et en y.

Equilibre des efforts dans la direction x :

$$F_{AX} = 0$$

Equilibre des efforts dans la direction y :

$$F_{AY} + F_{BY} - F + F = 0$$

$$F_{AY} + F_{BY} = 0$$

Equilibre des moments par rapport au point A, (composante suivant z) :

$$a F_{BY} - 2a F + 3a F = 0$$

$$F_{BY} = -F$$

### Question 2.2

$0 < x < a$	$M_z(x) = F x$
$a < x < 2a$	$M_z(x) = F a$
$2a < x < 3a$	$M_z(x) = F (3a - x)$
$3a < x < 4a$	$M_z(x) = 0$

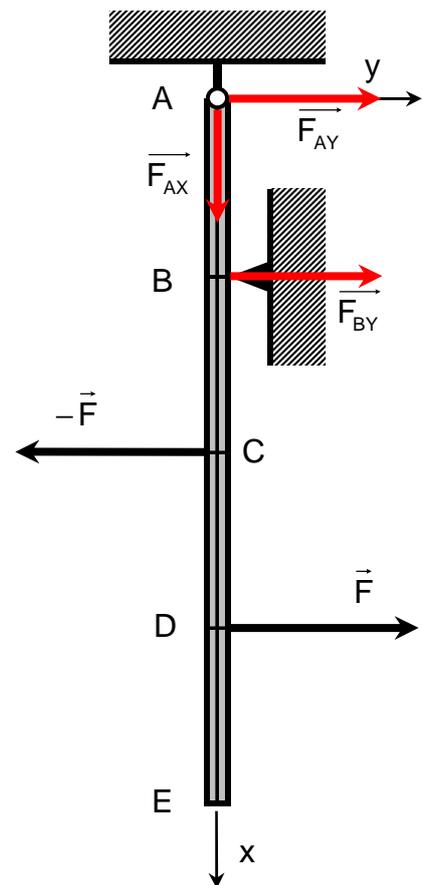


Fig. 3 : La barre avec les efforts inconnus.

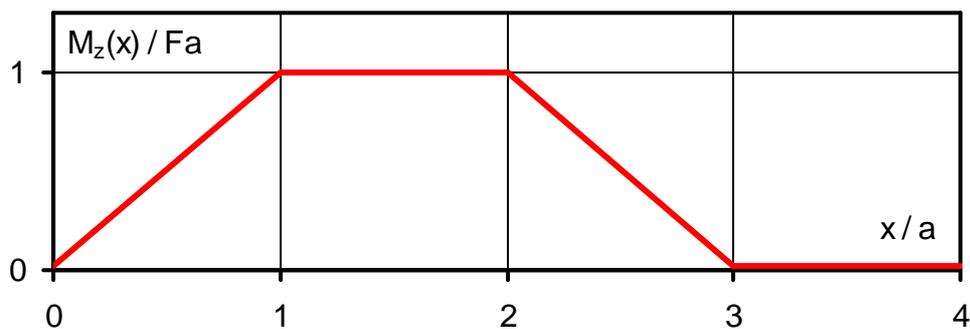


Fig. 4 : Evolution du moment fléchissant le long de la barre.

Question 2.3

$I_G = \iint_S (y^2 + z^2) ds$  ou, en coordonnées polaires,  $I_G = \iint_S r^2 ds$ .

$$I_G = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 dr d\theta$$

$$I_G = \frac{\pi R^4}{2}$$

Question 2.4

L'expression  $I_G = \iint_S (y^2 + z^2) ds$  permet immédiatement d'écrire  $I_G = I_y + I_z$ .

D'autre part, la symétrie circulaire de la section entraîne :  $I_y = I_z$ .

$$I_z = \frac{\pi R^4}{4}$$

Question 2.5

Formule liant la contrainte normale en un point d'une section au moment fléchissant :

$$n_1 = -\frac{M_z}{I_z} y$$

Le moment est maximum et constant pour  $x$  compris entre  $a$  et  $2a$ .

Le long de ce segment, les contraintes prennent donc des valeurs extrémales  $\pm n_{1\max}$  pour les points des sections dont les coordonnées  $y$  sont extrémales.

$n_1 = + n_{1\max}$	$a < x < 2a$	$y = - R$	$z = 0$
$n_1 = - n_{1\max}$	$a < x < 2a$	$y = + R$	$z = 0$

Question 2.6

$$n_{1\max} = \frac{M_{z\max}}{I_z} R \quad \text{avec} \quad M_{z\max} = F a \quad \text{et} \quad I_z = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$n_{1\max} = \frac{4 F a}{\pi R^3}$$

Question 2.7

Un effort  $\vec{F}'$  appliqué au point E dans la direction  $x$  génère un effort normal constant le long de la barre, donc une contrainte normale de traction uniforme  $n_1^T$  qui s'ajoute en tout point à la contrainte normale due au moment fléchissant précédemment calculé.

$$n_1^T = \frac{F'}{\pi R^2}$$

La condition à réaliser se traduit par :  $n_1^T + n_{1\min} = 0$  ou  $n_1^T - n_{1\max} = 0$

$$\frac{F'}{\pi R^2} - \frac{4 F a}{\pi R^3} = 0$$

$$F' = \frac{4 F a}{R}$$

### Question 3.1

Conformément à la Fig. 5 :

- $\vec{R}_{BH}$  et  $\vec{R}_{BV}$  sont les réactions du sol, dans les directions horizontale et verticale,
- $\vec{R}_{AH}$  est la réaction du mur dans la direction horizontale (il n'y a pas de réaction du mur dans la direction verticale, car le coefficient de frottement poutre-mur est nul).

Equilibre des efforts dans la direction x :

$$R_{BH} - R_{AH} = 0$$

Equilibre des efforts dans la direction y :

$$R_{BV} - P = 0$$

Equilibre des moments par rapport au point B, (composante suivant z) :

$$2 L R_{AH} \sin \alpha - L P \cos \alpha = 0$$

### Question 3.2

$$R_{AH} = R_{BH} = \frac{P}{2 \tan \alpha}$$

$$R_{BV} = P$$

### Question 3.3

Le coefficient de frottement  $f$  de la poutre sur le sol doit être strictement supérieur à la valeur minimale  $f_{\min}$  telle que  $R_{BH} = f_{\min} R_{BV}$ .

$$f_{\min} = \frac{1}{2 \tan \alpha}$$

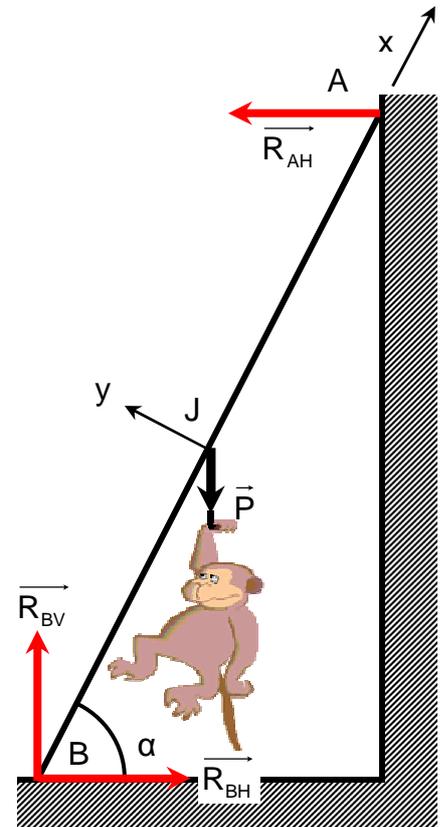


Fig. 5 : Jojo, la poutre et les efforts inconnus.

**Question 3.4**

Pour  $-L < x < 0$  :

$$N(x) = -R_{AH} \cos \alpha - P \sin \alpha$$

$$N(x) = -\frac{P(1 + \sin^2 \alpha)}{2 \sin \alpha}$$

Pour  $0 < x < L$  :

$$N(x) = -R_{AH} \cos \alpha$$

$$N(x) = -\frac{P \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha}$$

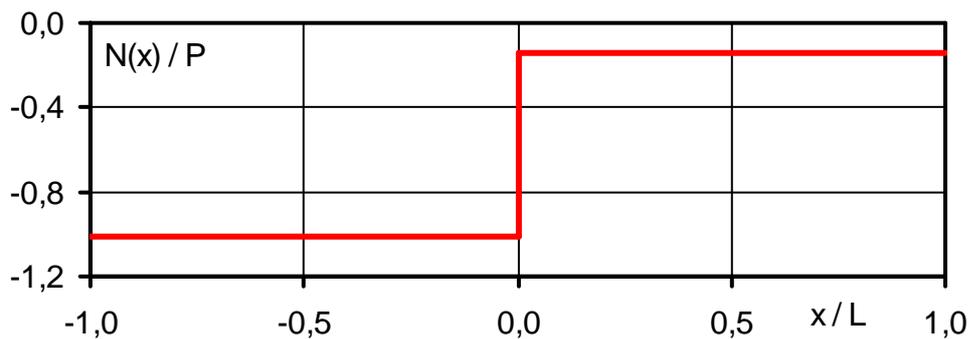


Fig. 6 : Evolution de l'effort normal le long de la poutre (tracé pour  $\alpha = 60^\circ$ ).

**Question 3.5**

Pour  $-L < x < 0$  :

$$T_y(x) = R_{AH} \sin \alpha - P \cos \alpha$$

$$T_y(x) = -\frac{P}{2} \cos \alpha$$

Pour  $0 < x < L$  :

$$T_y(x) = R_{AH} \sin \alpha$$

$$T_y(x) = \frac{P}{2} \cos \alpha$$

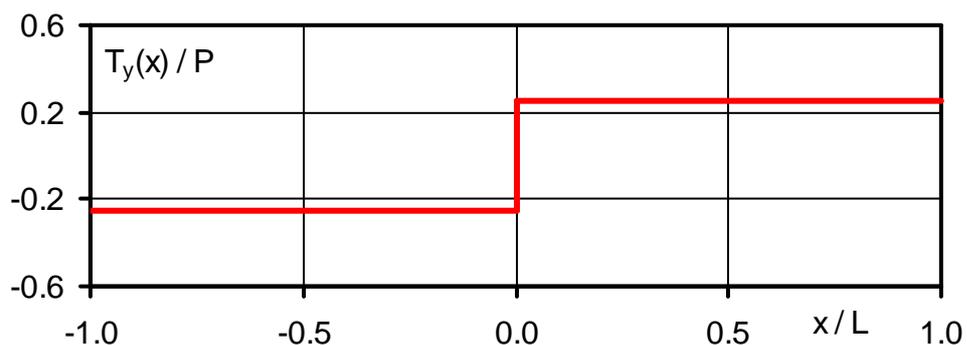


Fig. 7 : Evolution de l'effort tranchant le long de la poutre (tracé pour  $\alpha = 60^\circ$ ).

**Question 3.6**

Pour  $-L < x < 0$  :

$$M_z(x) = R_{AH} \sin \alpha (L - x) - P \cos \alpha (0 - x)$$

$$M_z(x) = \frac{P}{2} \cos \alpha (L + x)$$

Pour  $0 < x < L$  :

$$M_z(x) = R_{AH} \sin \alpha (L - x)$$

$$M_z(x) = \frac{P}{2} \cos \alpha (L - x)$$

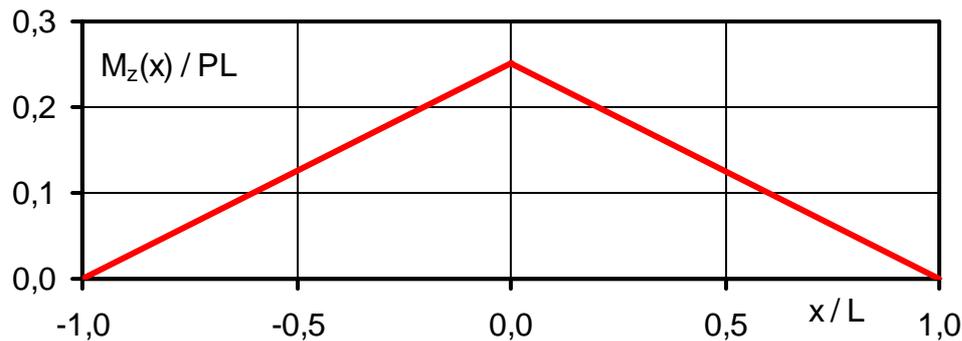


Fig. 8 : Evolution du moment fléchissant le long de la poutre (tracé pour  $\alpha = 60^\circ$ ).

**Question 3.7**

Sous l'effet du moment fléchissant, dont l'évolution est symétrique par rapport à l'axe  $J_y$ , la poutre se déforme symétriquement par rapport à cet axe.

La rotation de la section centrale est donc nulle.

$$\omega_z(0) = 0$$

**Question 3.8**

Le déplacement latéral  $V_y(x)$  des sections de la poutre est lié au moment fléchissant  $M_z(x)$

par l'équation différentielle : 
$$\frac{d^2 V_y(x)}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{E I_z}$$

Cette équation s'écrit aussi : 
$$\frac{d\omega_z(x)}{dx} = \frac{M_z(x)}{E I_z}$$

En tenant compte de l'expression de l'expression de  $M_z(x)$  entre  $x = 0$  et  $x = L$  :

$$\frac{d\omega_z(x)}{dx} = \frac{P \cos \alpha}{2 E I_z} (L - x)$$

Intégration : 
$$\omega_z(x) = \frac{P \cos \alpha}{2 E I_z} \left( Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1$$

$C_1$  est une constante d'intégration qui peut être déterminée grâce à la condition en  $x = 0$ .

$\omega_z(0) = 0$  implique  $C_1 = 0$ .

$$\omega_z(x) = \frac{P x \cos \alpha}{2 E I_z} \left( L - \frac{x}{2} \right)$$

Question 3.9

Le résultat de la question précédente s'écrit aussi :  $\frac{dV_y(x)}{dx} = \frac{P \cos \alpha}{2 E I_z} \left( Lx - \frac{x^2}{2} \right)$

$$\text{Intégration : } V_y(x) = \frac{P \cos \alpha}{2 E I_z} \left( L \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_2$$

$C_2$  est une constante d'intégration qui peut être déterminée grâce à la condition de déplacement transversal nul au niveau du point A.

$$V_y(L) = 0 \text{ implique } C_2 = -\frac{P L^3 \cos \alpha}{6 E I_z}$$

$$V_y(x) = -\frac{P \cos \alpha}{12 E I_z} (x^3 - 3 L x^2 + 2 L^3)$$

La flèche, déplacement du centre J de la poutre dans la direction y vers le mur, est égale à la valeur absolue de la constante  $C_2$ .

$$|V_y(0)| = \frac{P L^3 \cos \alpha}{6 E I_z}$$

Question 3.10

$$|V_y(0)| = 80 \text{ mm}$$