CP46 – Automne 2010
Sujet de l'Examen MEDIAN
10/11/2010

3 exercices indépendants - Durée : 2 h - Documents autorisés

Conseils et consignes :

- Lire l'énoncé.
- Respecter les notations de l'énoncé.
- Identifier les questions.
- Encadrer les résultats.
- Numéroter les feuilles (1 feuille = 4 pages) en indiquant le nombre total de feuilles (Exemple : 1/3, 2/3, 3/3).

1. Contraintes locales.

Une base B' $(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \overrightarrow{e'_3})$ est déduite d'une autre base B $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ par une rotation d'angle α autour de l'axe $\overrightarrow{e_2}$.

1.1. Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{e'_1}$, $\overrightarrow{e'_2}$ et $\overrightarrow{e'_3}$ dans la base B ?

1.2. En déduire la matrice de passage (P) de la base B à la base B'.

Donner les valeurs des coefficients de cette matrice pour $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

En un point M d'un matériau contraint, les 3 vecteurs contraintes $\overrightarrow{\sigma_i}$ s'exerçant sur les 3 facettes orientées par les vecteurs $\overrightarrow{e_i}$ sont :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\sigma_1} = 100\,\overrightarrow{e_1} - 100\sqrt{3}\,\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{\sigma_2} = 100\,\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{\sigma_3} = -100\sqrt{3}\,\overrightarrow{e_1} - 100\,\overrightarrow{e_3} \end{cases}$$

(les coordonnées sont exprimées en MPa)

1.3. Ecrire la matrice des contraintes au point M dans la base B.

1.4. Déterminer la matrice des contraintes au point M dans la base B' déduite de la base B par une rotation d'angle $\alpha = \frac{\pi}{3}$ autour de l'axe $\overrightarrow{e_2}$

1.5. Quelles sont, en MPa, les valeurs des 3 contraintes principales au point M ?

1.6. Le matériau est de l'acier, il est élastique linéaire isotrope, avec un module d'Young de 200 GPa et un coefficient de Poisson de 0,3.
Quelles sont les valeurs numériques des 6 composantes indépendantes du tenseur des déformations dans la base B' ?

2. La barre suspendue.

Une barre rectiligne AE de longueur 4a est suspendue par son extrémité A à une rotule et au contact d'un appui simple en son point B (Fig. 1). Les efforts $-\vec{F}$ et $\vec{F}$ sont appliqués respectivement aux points C et D, perpendiculairement à l'axe de la barre.

Conformément à la Fig. 1, la barre est munie d'un repère (A, x, y, z).

Les 4 segments AB, BC, CD et DE ont la même longueur a.

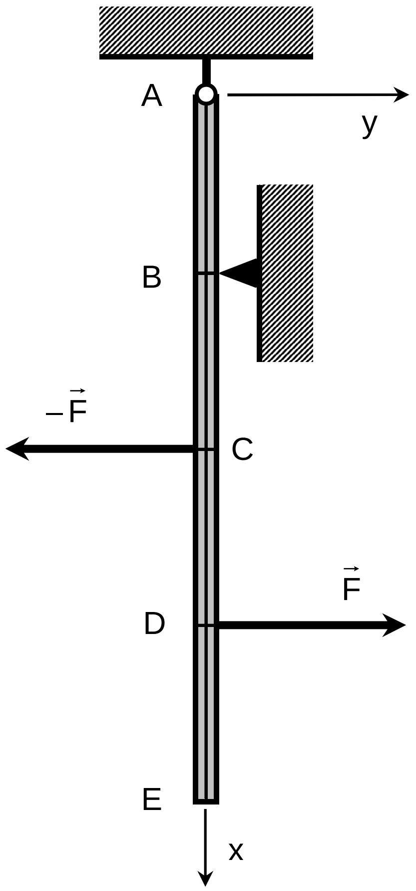

Fig. 1 : La barre et les conditions imposées.

2.1. Le poids de la barre étant considéré comme négligeable par rapport aux efforts appliqués, écrire les équations qui traduisent l'équilibre de la barre et en déduire l'effort exercé par l'appui simple au point B.

2.2. Quelle est l'évolution du moment fléchissant M_z le long de la barre, entre $x = 0$ et $x = 4a$? Donner son expression en tout point et tracer la courbe $M_z(x)$.

2.3. A partir de sa définition, calculer le moment d'inertie polaire I_G d'une section de la barre, qui est circulaire pleine de rayon R.

2.4. En déduire de façon simple le moment quadratique I_z de cette section par rapport à son axe Gz (G est le centre de gravité de la section).

2.5. En tout point x de la barre, s'il existe un moment fléchissant $M_z(x)$, il génère des contraintes.
Quels sont les points de la barre où ces contraintes sont minimales et maximales ? Donner les coordonnées x, y et z de l'ensemble de ces points.

2.6. Quelles sont les expressions de ces contraintes minimale et maximale, en fonction de F, R et a uniquement ?

2.7. Quel effort $\vec{F'}$ faudrait-il appliquer au point E dans la direction x pour que les contraintes dans la barre soient partout positives ?

CP46 – Automne 2010
Sujet de l'Examen MEDIAN
10/11/2010

3. Jojo le singe s'accroche à la poutre.

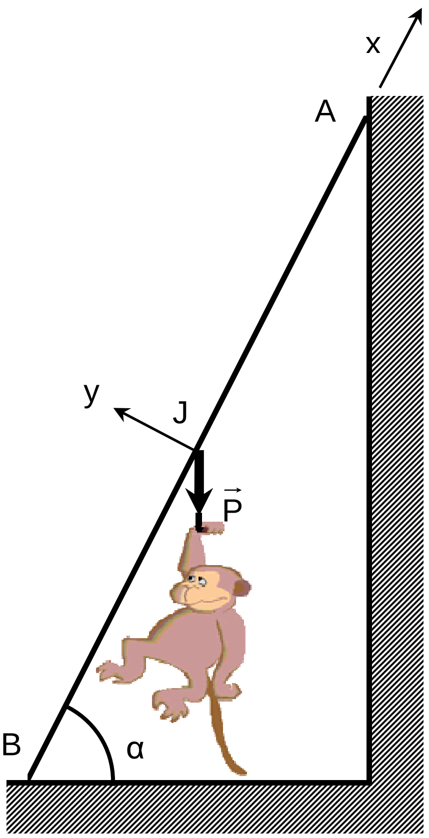

Fig. 2 : Jojo le singe accroché à la poutre.

Une poutre BA de longueur 2L est appuyée contre un mur vertical et posée sur le sol horizontal avec lequel elle fait un angle α (Fig. 2).
Le coefficient de frottement de la poutre sur le mur, au point A, est nul.
Jojo s'est accroché au point J, centre de la poutre, en x = 0, et son poids $\vec{P}$ s'applique verticalement en ce point.
Le poids de la poutre est négligeable par rapport à celui de Jojo.

3.1. Ecrire les équations d'équilibre de la poutre en faisant intervenir les réactions du mur au point A et du sol au point B.

3.2. En déduire la valeur de ces réactions exercées par le sol et le mur sur la poutre.

3.3. Quel doit être, en fonction de l'angle α, le coefficient de frottement minimum de l'échelle sur le sol, au point B, pour qu'elle ne glisse pas ?

3.4. Donner l'expression de l'effort normal N(x) le long de la poutre, entre x = -L et x = L et tracer un graphique schématique de son évolution en fonction de x.

3.5. Donner l'expression de l'effort tranchant $T_y(x)$ le long de la poutre, entre x = -L et x = L et tracer un graphique schématique de son évolution en fonction de x.

3.6. Donner l'expression du moment fléchissant $M_z(x)$ le long de la poutre, entre x = -L et x = L et tracer un graphique schématique de son évolution en fonction de x.

3.7. Constater que l'évolution du moment fléchissant est symétrique par rapport au point J, centre de la poutre, ou que la fonction $M_z(x)$ est paire, et en tirer une information concernant la rotation $\omega_z(0)$ de la section de la poutre au point J.

3.8. A partir de l'expression de $M_z(x)$ entre x = 0 et x = L, en tenant compte de la condition en x = 0 trouvée à la question précédente, et en faisant intervenir le module d'Young E du matériau ainsi que le moment quadratique I_z de la section, donner l'expression de la rotation $\omega_z(x)$ des sections de la poutre entre J et A.

3.9. Calculer la flèche prise par la poutre (c'est-à-dire le déplacement de son centre J dans la direction y) sous l'effet du moment fléchissant, et donner son expression en fonction de P, L, α, E et I_z.

3.10. Calculer numériquement la flèche de la poutre avec :

P= 600 N   L = 2 m $\alpha = \frac{\pi}{3}$ E = 10 GPa $I_z = 50\ cm^4$