CP46 – Automne 2011
Corrigé de l'Examen MEDIAN
02/11/2011

3 exercices indépendants - Durée : 2 h - Documents autorisés

Conseils et consignes :

- Lire l'énoncé.
- Respecter les notations de l'énoncé.
- Identifier les questions.
- Encadrer les résultats.
- Numéroter les feuilles (1 feuille = 4 pages) en indiquant le nombre total de feuilles (Exemple : 1/3, 2/3, 3/3).

1. Contraintes et déformations locales

1.1. Les 3 vecteurs d'une base orthonormée directe B' ($\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \overrightarrow{e'_3}$) sont définis en fonction de ceux d'une autre base orthonormée directe B ($\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$).

$$\begin{cases} \overrightarrow{e'_1} = \overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{e'_2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}\sqrt{2}\right) \\ \overrightarrow{e'_3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(-\overrightarrow{e_1}\sqrt{2} + \overrightarrow{e_2}\right) \end{cases}$$

Ecrire la matrice de passage (P) de la base B à la base B'.

1.2. En un point M d'un matériau contraint, les 3 vecteurs contraintes $\overrightarrow{\sigma_i}$ s'exerçant sur les 3 facettes orientées par les vecteurs $\overrightarrow{e_i}$ sont :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\sigma_1} = 80\,\overrightarrow{e_1} - 10\sqrt{2}\,\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{\sigma_2} = -10\sqrt{2}\,\overrightarrow{e_1} + 70\,\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{\sigma_3} = 30\,\overrightarrow{e_3} \end{cases}$$

(les coordonnées sont exprimées en MPa)

Ecrire la matrice des contraintes (σ) au point M dans la base B.

1.3. Déterminer la matrice des contraintes (σ') au point M dans la base B'.

1.4. Sans aucun calcul supplémentaire, donner les valeurs des 3 contraintes principales au point M.

1.5. Le matériau est élastique linéaire isotrope, avec un module d'Young de 100 GPa et un coefficient de Poisson de 0,3.
Quelles sont les valeurs numériques des 6 composantes indépendantes du tenseur des déformations dans la base B' ?

2. Equilibres de poutre

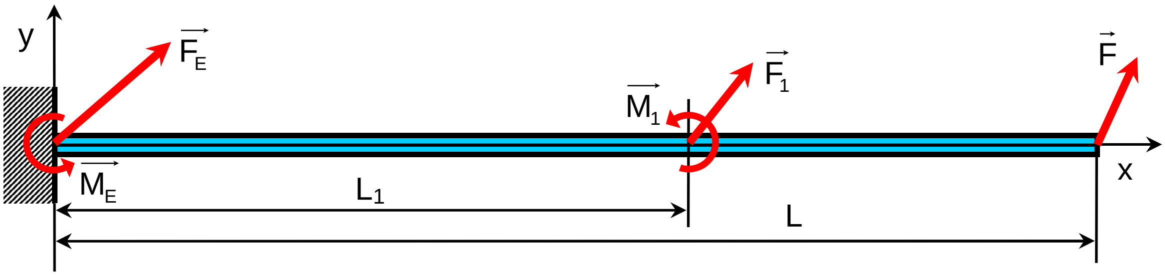

Fig. 1 : Une poutre encastrée soumise à 3 efforts et 2 moments.

Conformément à la Fig. 1 ci-dessus, une poutre droite est encastrée à l'une de ses extrémités (en x = 0) et soumise à un effort $\vec{F}$ en son autre extrémité (en x = L), ainsi qu'à un effort $\vec{F_1}$ et à un moment $\vec{M_1}$ en $x = L_1$.

L'effort $\vec{F}$ est imposé et possède 2 composantes connues F_X et F_Y.

L'effort $\vec{F_1}$ possède 2 composantes F_{1X} et F_{1Y}, à déterminer en fonction des questions posées ci-dessous.

Le moment $\vec{M_1}$ possède une composante M_{1Z}, à déterminer en fonction des questions posées ci-dessous.

L'encastrement impose à la poutre un effort $\vec{F_E}$ (de composantes F_{EX} et F_{EY}) et un moment $\vec{M_E}$ (possédant une seule composante M_{EZ}).

2.1. Quelle doit être, si elle existe, la valeur de F_{1X} pour que l'effort normal N dans la poutre soit nul en x = 0 ?

2.2. M_{1Z} étant nul, quelle doit être, si elle existe, la valeur de F_{1Y} pour que l'effort tranchant T_Y dans la poutre soit nul en x = 0 ?
Quel est alors la valeur de M_{EZ} ?

2.3. M_{1Z} étant nul, quelle doit être, si elle existe, la valeur de F_{1Y} pour que le moment fléchissant M_Z dans la poutre soit nul en x = 0 ?
Quel est alors la valeur de F_{EY} ?

2.4. F_{1Y} étant nul, quelle doit être, si elle existe, la valeur de M_{1Z} pour que le moment fléchissant M_Z dans la poutre soit nul en x = 0 ?
Quel est alors la valeur de F_{EY} ?

2.5. F_{1Y} étant nul, quelle doit être, si elle existe, la valeur de M_{1Z} pour que l'effort tranchant T_Y dans la poutre soit nul en x = 0 ?
Quel est alors la valeur de M_{EZ} ?

3. Flexion d'une poutre de section rectangulaire dans 2 directions

Une poutre droite est encastrée à l'une de ses extrémités (en x = 0) et soumise, en son autre extrémité (en x = L), à un effort $\vec{F}$.
La Fig. 2 ci-dessous précise les dimensions de la section de la poutre et les composantes de l'effort, qui est perpendiculaire à la fibre moyenne de la poutre et dont les 2 composante non-nulles sont positives, égales et notées F.

CP46 – Automne 2011
Corrigé de l'Examen MEDIAN
02/11/2011

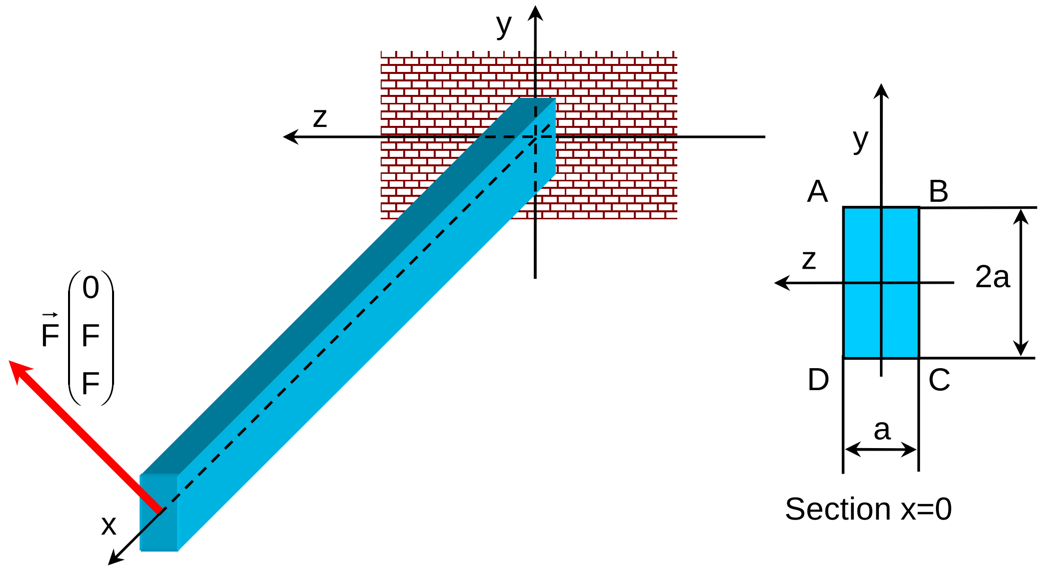

Fig. 2 : Une poutre droite encastrée de section rectangulaire et un effort perpendiculaire.

3.1. A partir de sa formule de définition, calculer le moment quadratique I_Z d'une section de la poutre en fonction de a.

3.2. Même question pour le moment quadratique I_Y.

3.3. En une section x quelconque, comment sont appelées les 3 composantes de la résultante $\vec{R}$ du torseur de cohésion ?
Donner leurs valeurs en fonction de F.

3.4. En une section x quelconque, comment sont appelées les 3 composantes du moment résultant $\vec{M}$ du torseur de cohésion ?
Donner leurs valeurs en fonction de F, x et L.
Tracer les évolutions de ces valeurs en fonction de x, sur un graphique unique.

3.5. Donner l'expression de la contrainte normale σ en un point quelconque de la poutre, de coordonnées x, y et z.

3.6. Dans une section différente de l'extrémité (x < L), quels sont les points où σ = 0 ?

3.7. Quelles sont les valeurs de cette contrainte normale aux 4 angles de la section située à l'encastrement, soient les points A, B, C et D définis sur la Fig. 2 (à exprimer en fonction de F, L et a uniquement) ?

3.8. Quel effort supplémentaire F_X faudrait-il exercer dans la direction x, à l'extrémité de la poutre (x = L), pour qu'elle soit entièrement en compression (σ < 0 partout) ?

3.9. A partir de l'équation différentielle qui lie le déplacement latéral $V_Y(x)$ d'une section au moment fléchissant $M_Z(x)$, déterminer le déplacement $V_Y(L)$ de l'extrémité de la poutre dans la direction y.
L'expression attendue ne fait intervenir que F, L, a et le module d'Young E du matériau de la poutre.

3.10. En utilisant éventuellement une partie de la question précédente, déterminer le déplacement $V_Z(L)$ de l'extrémité de la poutre dans la direction z.

3.11. La poutre est-elle soumise à une flexion droite ou à une flexion déviée ?
Pourquoi ?

Eléments de réponses

Question 1.1
Découle de la définition de la matrice de passage.

$$\boxed{(P) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Question 1.2
Découle de la définition de la matrice des contraintes.

$$\boxed{(\sigma) = \begin{pmatrix} 80 & -10\sqrt{2} & 0 \\ -10\sqrt{2} & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}}$$

Question 1.3
Application de la formule de changement de base des matrices.

$$(\sigma') = {}^{T}(P)(\sigma)(P)$$

$$(\sigma') = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 80 & -10\sqrt{2} & 0 \\ -10\sqrt{2} & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(\sigma') = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 90 \end{pmatrix}}$$

Question 1.4
Il apparaît que la matrice des contraintes est diagonale dans la base B'.
Les vecteurs de cette base sont donc les directions principales des contraintes et les contraintes principales sont :

$$\boxed{\begin{cases} \sigma'_{11} = 30\ \text{MPa} \\ \sigma'_{22} = 60\ \text{MPa} \\ \sigma'_{33} = 90\ \text{MPa} \end{cases}}$$

Question 1.5

D'après la loi de Hooke, en tenant compte des contraintes calculées dans la base B'.

$$\begin{pmatrix}\varepsilon'_{11}\\ \varepsilon'_{22}\\ \varepsilon'_{33}\\ \gamma'_{23}\\ \gamma'_{13}\\ \gamma'_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{E} & -\frac{v}{E} & -\frac{v}{E} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{v}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{v}{E} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{v}{E} & -\frac{v}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma'_{11}\\ \sigma'_{22}\\ \sigma'_{33}\\ \sigma'_{23}\\ \sigma'_{13}\\ \sigma'_{12}\end{pmatrix}\quad \text{avec } \gamma_{ij}=2\,\varepsilon_{ij}\quad \text{et}\quad G=\frac{E}{2\,(1+v)}$$

$$\boxed{\begin{cases}\varepsilon'_{11}=-150.10^{-6} & \varepsilon'_{12}=0\\ \varepsilon'_{22}=240.10^{-6} & \varepsilon'_{13}=0\\ \varepsilon'_{33}=630.10^{-6} & \varepsilon'_{23}=0\end{cases}}\quad \text{ou}\quad \boxed{(\varepsilon')=\begin{pmatrix}-150.10^{-6} & 0 & 0\\ 0 & 240.10^{-6} & 0\\ 0 & 0 & 630.10^{-6}\end{pmatrix}}$$

Question 2.1

Effort normal en x = 0 :

$N(0)=F_X+F_{1X}$

La condition $N(0)=0$ fournit la valeur de F_{1X}.

$$\boxed{F_{1X}=-F_X}$$

Question 2.2

Effort tranchant en x = 0 :

$T_Y(0)=F_Y+F_{1Y}$

La condition $T_Y(0)=0$ fournit la valeur de F_{1Y}.

$$\boxed{F_{1Y}=-F_Y}$$

Equilibre des moments appliqués à la poutre, exprimé en x = 0 :

$M_{EZ}+F_{1Y}\,L_1+F_Y\,L=0$

$$\boxed{M_{EZ}=-F_Y\,(L-L_1)}$$

Question 2.3

Moment fléchissant en x = 0 :

$M_Z(0)=F_Y\,L+F_{1Y}\,L_1$

La condition $M_Z(0)=0$ fournit la valeur de F_{1Y}.

$$\boxed{F_{1Y}=-F_Y\frac{L}{L_1}}$$

Equilibre des efforts appliqués à la poutre dans la direction y :

$F_{EY} + F_{1Y} + F_Y = 0$

$$\boxed{F_{EY} = F_Y \left(\frac{L}{L_1} - 1 \right)}$$

Question 2.4

Moment fléchissant en x = 0 :

$M_Z(0) = M_{1Z} + F_Y L$

La condition $M_Z(0) = 0$ fournit la valeur de M_{1Z}.

$$\boxed{M_{1Z} = -F_Y L}$$

Equilibre des efforts appliqués à la poutre dans la direction y :

$F_{EY} + F_Y = 0$

$$\boxed{F_{EY} = -F_Y}$$

Question 2.5

Effort tranchant en x = 0 :

$T_Y(0) = F_Y$

Il est impossible de réaliser la condition $T_Y(0) = 0$, sauf dans un cas très particulier où on aurait $F_Y = 0$.

Question 3.1

Par définition : $I_Z = \iint_{Section} y^2 \, ds$

$I_Z = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a}^{a} y^2 \, dy \, dz$

$$\boxed{I_Z = \frac{2\,a^4}{3}}$$

Question 3.2

Par définition : $I_Y = \iint_{Section} z^2 \, ds$

$I_Y = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a}^{a} z^2 \, dy \, dz$

$$\boxed{I_Y = \frac{a^4}{6}}$$

Question 3.3

$$\boxed{\vec{R} = \begin{pmatrix} \text{Effort normal } N \\ \text{Effort tranchant } T_Y \\ \text{Effort tranchant } T_Z \end{pmatrix}} \qquad \boxed{\overrightarrow{R_G} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ F \end{pmatrix}}$$

Question 3.4

$$\boxed{\vec{M} = \begin{pmatrix} \text{Moment de torsion } M_X \\ \text{Moment fléchissant } M_Y \\ \text{Moment fléchissant } M_Z \end{pmatrix}}$$

Calcul des composantes du moment en une section x :

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} L-x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ F \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F\,(L-x) \\ F\,(L-x) \end{pmatrix}}$$

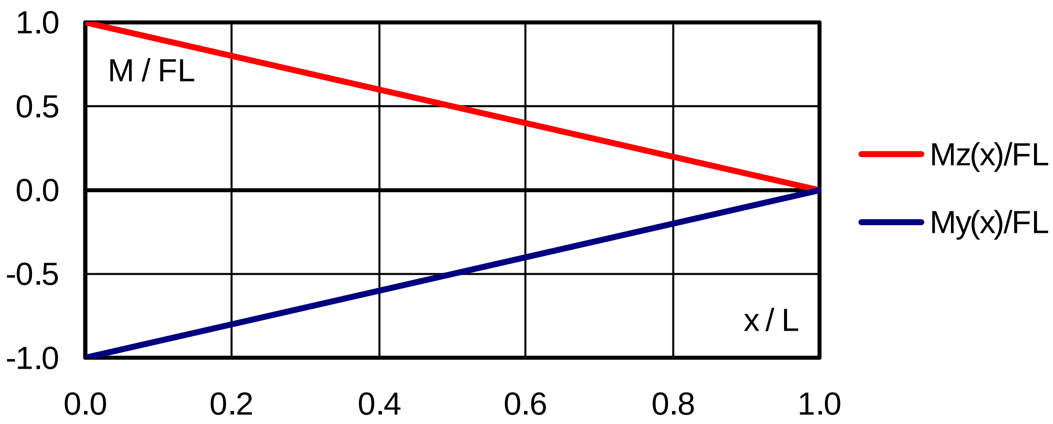

Fig. 3 : Evolution des moments fléchissants le long de la poutre.

Question 3.5

Quand le moment fléchissant possède 2 composantes, la contrainte normale σ est donnée par :

$$\sigma = -\frac{M_Z}{I_Z}\,y + \frac{M_Y}{I_Y}\,z$$

M_Z, M_Y, I_Z et I_Y sont à remplacer par leurs expressions trouvées aux questions précédentes.

$$\boxed{\sigma = -\frac{3\,F}{2\,a^4}\,(L-x)\,(y+4\,z)}$$

Question 3.6

D'après l'expression ci-dessus, σ est nulle pour tous les points de la section appartenant à la droite d'équation : y + 4z = 0.

Autrement dit : l'ensemble des points où σ est nulle est l'intersection de la poutre et du plan défini par l'équation y + 4z = 0.

Question 3.7

Point A : $x = 0$ $y = a$ $z = \frac{a}{2}$ $\boxed{\sigma_A = -\frac{9\,F\,L}{2\,a^3}}$

Point B : $x = 0$ $y = a$ $z = -\frac{a}{2}$ $\boxed{\sigma_B = \frac{3\,F\,L}{2\,a^3}}$

Point C : $x = 0$ $y = -a$ $z = -\frac{a}{2}$ $\boxed{\sigma_C = \frac{9\,F\,L}{2\,a^3}}$

Point D : $x = 0$ $y = -a$ $z = \frac{a}{2}$ $\boxed{\sigma_D = -\frac{3\,F\,L}{2\,a^3}}$

Question 3.8

L'effort supplémentaire F_X générera tout le long de la poutre un effort normal constant $N = F_X$, donc une contrainte supplémentaire σ' qui s'ajoutera en tout point à la contrainte normale due au moment fléchissant précédemment calculé.

$$\sigma' = \frac{F_x}{2\,a^2}$$

Pour que la contrainte normale totale qui en résulte soit partout négative, il suffit qu'elle soit nulle au point C, où la contrainte normale due à la flexion est maximale.

$$\sigma' + \sigma_C = 0$$

$$\frac{F_x}{2\,a^2} = -\frac{9\,F\,L}{2\,a^3}$$

$$\boxed{F_x = -\frac{9\,F\,L}{a}}$$

Question 3.9

Le déplacement latéral $V_Y(x)$ des sections de la poutre est lié au moment fléchissant $M_z(x)$ par l'équation différentielle : $\frac{d^2V_Y(x)}{dx^2} = \frac{M_Z(x)}{E\,I_Z}$

En tenant compte de l'expression de l'expression de $M_Z(x)$ entre x = 0 et x = L :

$$\frac{d^2V_Y(x)}{dx^2} = \frac{F}{E\,I_Z}(L - x)$$

$1^{ère}$ intégration : $\frac{dV_Y(x)}{dx} = \frac{F}{E\,I_z}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) + C_1$

C_1 est une constante d'intégration qui est déterminée grâce à la condition d'encastrement, qui implique que la pente de la déformée est nulle en x = 0.

$C_1 = 0$

$2^{ème}$ intégration : $V_Y(x) = \frac{F}{E\,I_z}\left(L\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C_2$

C_2 est une constante d'intégration qui est être déterminée grâce à la condition d'encastrement, qui implique que le déplacement transversal nul en x = 0.

$C_2 = 0$

$$V_Y(x) = \frac{F\,x^2}{6\,E\,I_Z}(3L - x)$$

Pour x = L et en remplaçant I_Z par son expression en fonction de a :

$$\boxed{V_Y(L) = \frac{F\,L^3}{2\,E\,a^4}}$$

Question 3.10

Le déplacement latéral $V_Z(x)$ des sections de la poutre est lié au moment fléchissant $M_Y(x)$ par l'équation différentielle : $\frac{d^2V_Z(x)}{dx^2} = -\frac{M_Y(x)}{E\,I_Y}$

En tenant compte de l'expression de l'expression de $M_Y(x)$ entre x = 0 et x = L :

$$\frac{d^2V_Z(x)}{dx^2} = \frac{F}{E\,I_Y}(L - x)$$

Les calculs sont alors identiques à ceux de la question précédente.

$$V_Z(x) = \frac{F\,x^2}{6\,E\,I_Y}(3L - x)$$

Pour x = L et en remplaçant I_Y par son expression en fonction de a :

$$\boxed{V_Z(L) = \frac{2\,F\,L^3}{E\,a^4}}$$

Question 3.11

La poutre est soumise à une flexion déviée.

En effet, pour un effort, donc un moment, de mêmes intensités dans la direction y et dans la direction z, les sections de la poutre se déplacent 4 fois plus dans la direction z que dans la direction y.

$V_Z(x) = 4\,V_Y(x)$

Autrement dit, le moment $\vec{M}$ et le déplacement $\vec{U}$ qu'il provoque ne sont pas perpendiculaires.

Le déplacement $\vec{U} = \frac{F\,x^2(3L - x)}{4\,E\,a^4}\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$ est dû au moment $\vec{M} = F\,(L - x)\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

$$\vec{U}.\vec{M} = \frac{3\,F^2\,x^2(L - x)(3L - x)}{4\,E\,a^4}$$

$\vec{U}.\vec{M} \neq 0$ pour $0 < x < L$