CP46 – Automne 2011
Sujet de l'Examen MEDIAN
02/11/2011

3 exercices indépendants - Durée : 2 h - Documents autorisés

Conseils et consignes :

- Lire l'énoncé.
- Respecter les notations de l'énoncé.
- Identifier les questions.
- Encadrer les résultats.
- Numéroter les feuilles (1 feuille = 4 pages) en indiquant le nombre total de feuilles (Exemple : 1/3, 2/3, 3/3).

1. Contraintes et déformations locales

1.1. Les 3 vecteurs d'une base orthonormée directe B' ($\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \overrightarrow{e'_3}$) sont définis en fonction de ceux d'une autre base orthonormée directe B ($\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$).

$$\begin{cases} \overrightarrow{e'_1} = \overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{e'_2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}\sqrt{2}\right) \\ \overrightarrow{e'_3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(-\overrightarrow{e_1}\sqrt{2} + \overrightarrow{e_2}\right) \end{cases}$$

Ecrire la matrice de passage (P) de la base B à la base B'.

1.2. En un point M d'un matériau contraint, les 3 vecteurs contraintes $\overrightarrow{\sigma_i}$ s'exerçant sur les 3 facettes orientées par les vecteurs $\overrightarrow{e_i}$ sont :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\sigma_1} = 80\,\overrightarrow{e_1} - 10\sqrt{2}\,\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{\sigma_2} = -10\sqrt{2}\,\overrightarrow{e_1} + 70\,\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{\sigma_3} = 30\,\overrightarrow{e_3} \end{cases}$$

(les coordonnées sont exprimées en MPa)

Ecrire la matrice des contraintes (σ) au point M dans la base B.

1.3. Déterminer la matrice des contraintes (σ') au point M dans la base B'.

1.4. Sans aucun calcul supplémentaire, donner les valeurs des 3 contraintes principales au point M.

1.5. Le matériau est élastique linéaire isotrope, avec un module d'Young de 100 GPa et un coefficient de Poisson de 0,3.
Quelles sont les valeurs numériques des 6 composantes indépendantes du tenseur des déformations dans la base B' ?

CP46 – Automne 2011
Sujet de l'Examen MEDIAN
02/11/2011

2. Equilibres de poutre

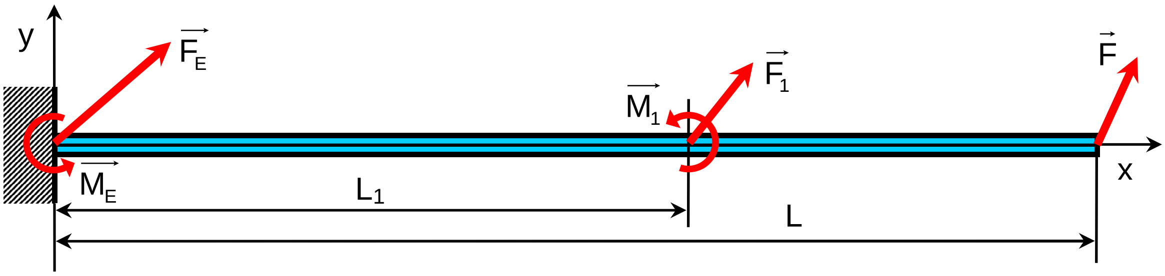

Fig. 1 : Une poutre encastrée soumise à 3 efforts et 2 moments.

Conformément à la Fig. 1 ci-dessus, une poutre droite est encastrée à l'une de ses extrémités (en x = 0) et soumise à un effort $\vec{F}$ en son autre extrémité (en x = L), ainsi qu'à un effort $\vec{F_1}$ et à un moment $\vec{M_1}$ en $x = L_1$.

L'effort $\vec{F}$ est imposé et possède 2 composantes connues F_X et F_Y.

L'effort $\vec{F_1}$ possède 2 composantes F_{1X} et F_{1Y}, à déterminer en fonction des questions posées ci-dessous.

Le moment $\vec{M_1}$ possède une composante M_{1Z}, à déterminer en fonction des questions posées ci-dessous.

L'encastrement impose à la poutre un effort $\vec{F_E}$ (de composantes F_{EX} et F_{EY}) et un moment $\vec{M_E}$ (possédant une seule composante M_{EZ}).

2.1. Quelle doit être, si elle existe, la valeur de F_{1X} pour que l'effort normal N dans la poutre soit nul en x = 0 ?

2.2. M_{1Z} étant nul, quelle doit être, si elle existe, la valeur de F_{1Y} pour que l'effort tranchant T_Y dans la poutre soit nul en x = 0 ?
Quel est alors la valeur de M_{EZ} ?

2.3. M_{1Z} étant nul, quelle doit être, si elle existe, la valeur de F_{1Y} pour que le moment fléchissant M_Z dans la poutre soit nul en x = 0 ?
Quel est alors la valeur de F_{EY} ?

2.4. F_{1Y} étant nul, quelle doit être, si elle existe, la valeur de M_{1Z} pour que le moment fléchissant M_Z dans la poutre soit nul en x = 0 ?
Quel est alors la valeur de F_{EY} ?

2.5. F_{1Y} étant nul, quelle doit être, si elle existe, la valeur de M_{1Z} pour que l'effort tranchant T_Y dans la poutre soit nul en x = 0 ?
Quel est alors la valeur de M_{EZ} ?

3. Flexion d'une poutre de section rectangulaire dans 2 directions

Une poutre droite est encastrée à l'une de ses extrémités (en x = 0) et soumise, en son autre extrémité (en x = L), à un effort $\vec{F}$.
La Fig. 2 ci-dessous précise les dimensions de la section de la poutre et les composantes de l'effort, qui est perpendiculaire à la fibre moyenne de la poutre et dont les 2 composante non-nulles sont positives, égales et notées F.

CP46 – Automne 2011
Sujet de l'Examen MEDIAN
02/11/2011

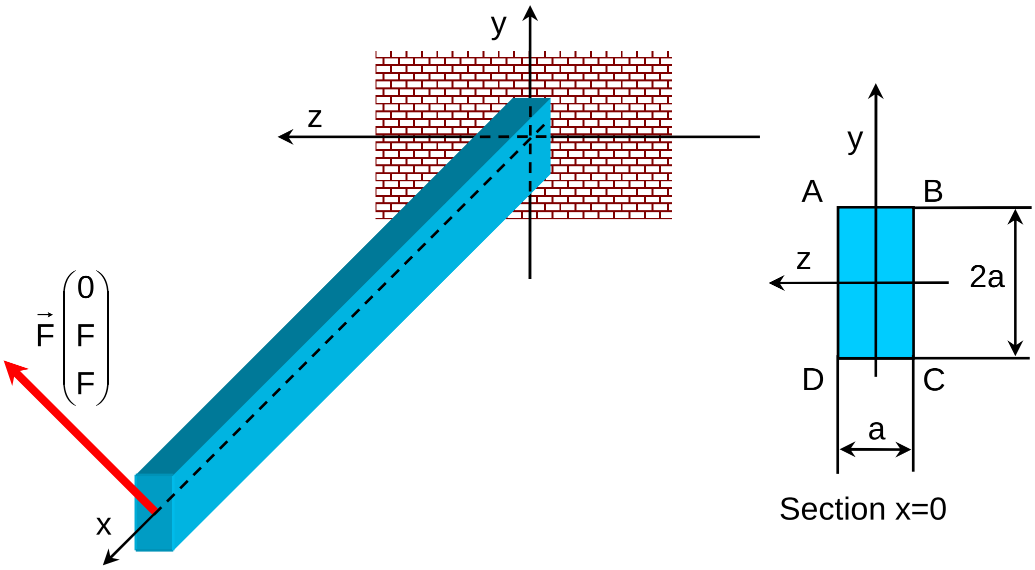

Fig. 2 : Une poutre droite encastrée de section rectangulaire et un effort perpendiculaire.

3.1. A partir de sa formule de définition, calculer le moment quadratique I_Z d'une section de la poutre en fonction de a.

3.2. Même question pour le moment quadratique I_Y.

3.3. En une section x quelconque, comment sont appelées les 3 composantes de la résultante $\vec{R}$ du torseur de cohésion ?
Donner leurs valeurs en fonction de F.

3.4. En une section x quelconque, comment sont appelées les 3 composantes du moment résultant $\vec{M}$ du torseur de cohésion ?
Donner leurs valeurs en fonction de F, x et L.
Tracer les évolutions de ces valeurs en fonction de x, sur un graphique unique.

3.5. Donner l'expression de la contrainte normale σ en un point quelconque de la poutre, de coordonnées x, y et z.

3.6. Dans une section différente de l'extrémité (x < L), quels sont les points où σ = 0 ?

3.7. Quelles sont les valeurs de cette contrainte normale aux 4 angles de la section située à l'encastrement, soient les points A, B, C et D définis sur la Fig. 2 (à exprimer en fonction de F, L et a uniquement) ?

3.8. Quel effort supplémentaire F_X faudrait-il exercer dans la direction x, à l'extrémité de la poutre (x = L), pour qu'elle soit entièrement en compression (σ < 0 partout) ?

3.9. A partir de l'équation différentielle qui lie le déplacement latéral $V_Y(x)$ d'une section au moment fléchissant $M_Z(x)$, déterminer le déplacement $V_Y(L)$ de l'extrémité de la poutre dans la direction y.
L'expression attendue ne fait intervenir que F, L, a et le module d'Young E du matériau de la poutre.

3.10. En utilisant éventuellement une partie de la question précédente, déterminer le déplacement $V_Z(L)$ de l'extrémité de la poutre dans la direction z.

3.11. La poutre est-elle soumise à une flexion droite ou à une flexion déviée ?
Pourquoi ?