CP46 - MQ43 - Automne 2012
Corrigé de l'Examen MEDIAN
17/11/2012

3 exercices indépendants - Durée : 2 h - Documents autorisés

Conseils et consignes :

- Lire l'énoncé.
- Respecter les notations de l'énoncé.
- Identifier les questions.
- Encadrer les résultats.
- Numéroter les feuilles (1 feuille = 4 pages) en indiquant le nombre total de feuilles (Exemple : 1/3, 2/3, 3/3).

1. Propriétés d'un cône

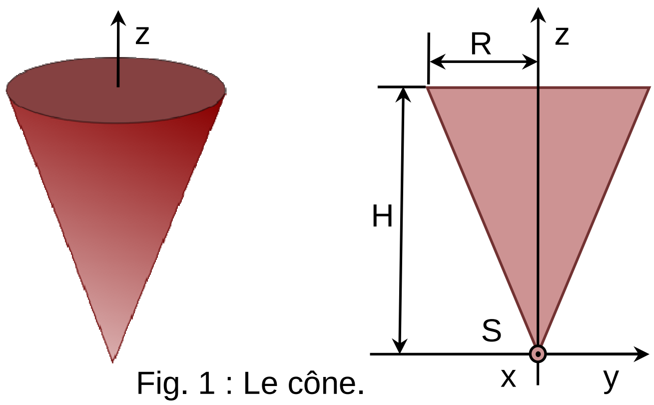

Fig. 1 : Le cône.

Conformément à la Fig. 1 ci-contre, un cône est muni d'un repère (S, x, y, z).
S est le sommet du cône et Sz son axe de révolution.
Il est constitué d'un matériau homogène de masse volumique ρ.
Sa base est un cercle de rayon R et H est sa hauteur.

1.1. A une distance z du plan Sxy, la section du cône parallèle à ce plan est un disque de rayon $r_{max}(z)$.
Exprimer $r_{max}(z)$ en fonction de z, R et H.

1.2. Démontrer la formule donnant la masse M du cône, en fonction de ρ, R et H.
En déduire l'expression de la masse volumique ρ en fonction de la masse et des dimensions du cône.

1.3. Quelle est la coordonnée z_G, sur l'axe Sz, du centre de gravité G du cône ?

1.4. Calculer le moment d'inertie I_{Sz} du cône par rapport à son axe de révolution.
En utilisant l'expression de ρ trouvée à la question 1.2, donner l'expression de I_{Sz} en fonction de M et de R uniquement.

1.5. Calculer le moment d'inertie I_{Sxy} du cône par rapport au plan Sxy.
Donner l'expression de I_{Sxy} en fonction de M et de H uniquement.

1.6. En utilisant les résultats des questions précédentes, calculer le moment d'inertie I_{Sx} du cône par rapport à l'axe Sx passant par son sommet.
Donner l'expression de I_{Sx} en fonction de M, R et H uniquement.

1.7. En appliquant le théorème de Huygens, calculer le moment d'inertie I_{Gx} du cône par rapport à l'axe Gx passant par son centre de gravité G et parallèle à la direction x.
Donner l'expression de I_{Gx} en fonction de M, R et H uniquement.

2. Pesanteur variable

Sur une planète lointaine, l'énergie potentielle de pesanteur U d'un point de masse M dépend du temps t et s'exprime par : $U(t) = M\,a\cos(\omega t)\,x + M\,[g + a\sin(\omega t)]\,z$

Dans cette expression, g, a et ω sont des constantes positives.

x, y et z sont les coordonnées du point dans un repère fixe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2.1. Quel est le champ de forces $\overrightarrow{F(t)}$ qui dérive de cette énergie potentielle ?

2.2. Un point de masse M évolue librement dans ce champ de forces.
Quel est son vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma(t)}$, en fonction du temps t et des constantes g, a et ω ?

2.3. A l'instant t = 0, ce point est libéré avec une vitesse initiale $\overrightarrow{V_0} = V_0\,\vec{j} + \frac{a}{\omega}\vec{k}$
Quelle est sa vitesse ultérieure $\overrightarrow{V(t)}$, à un instant quelconque t ?

2.4. A l'instant t = 0, ce point était situé au point M_0 tel que $\overrightarrow{OM_0} = \frac{a}{\omega^2}\vec{i} + H\,\vec{k}$
Exprimer les fonctions x(t), y(t) et z(t) qui définissent sa trajectoire.

3. Numéro de cirque

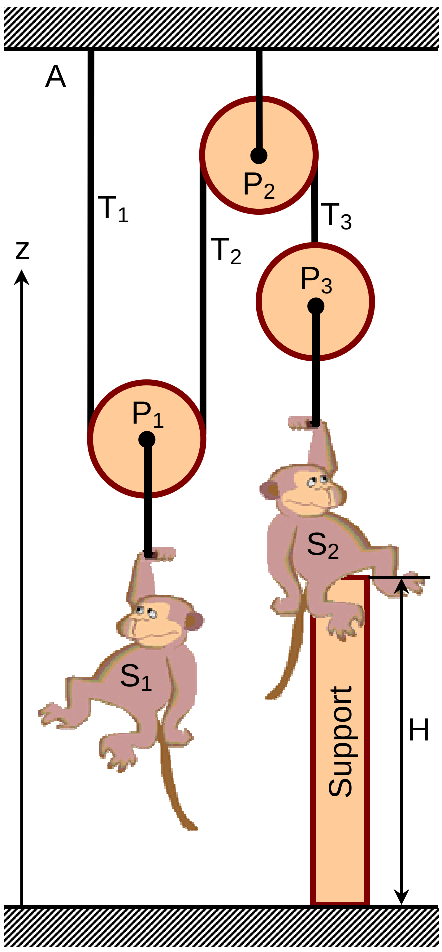

Fig. 2 : 3 poulies et 2 singes.

Au début du numéro, 2 singes (S_1 et S_2) et 3 poulies (P_1, P_2 et P_3) sont immobiles, disposés suivant la Fig. 2 ci-contre.
L'extrémité d'une corde solide et inextensible est fixée au plafond (point A).
La corde passe sur les 2 poulies P_1 et P_2, qui tournent sans aucun frottement sur leur axe.
Son autre extrémité est fixée à la poulie P_3, qui ne tourne pas.
L'axe de la poulie P_2 est fixé au plafond.
Les singes S_1 et S_2 sont suspendus, par un système parfaitement rigide, aux axes des poulies P_1 et P_3.
Le singe S_2 est assis sur un support de hauteur H.
Les 2 singes et les 3 poulies ont chacun la même masse M.
L'ensemble du cirque est soumis à l'accélération de la pesanteur terrestre, dirigée verticalement vers le bas, et d'intensité g.

A l'instant t = 0, le dresseur retire adroitement le support et le singe S_2 commence à descendre gracieusement, sans aucun balancement, ce qui fait monter le singe S_1.
L'étude du mouvement ultérieur permettra de savoir au bout de combien de temps le singe S_2 sera assis sur le sol.

3.1. Sachant que la longueur de la corde est constante, déterminer l'augmentation d'altitude Δz_1 de S_1 quand S_2 descend de Δz_2.

3.2. En déduire la relation qui existe entre les accélérations verticales Γ_1 et Γ_2 des 2 singes.

3.3. Les 3 poulies sont assimilées à des cylindres de rayon extérieur R, qui est aussi le rayon sur lequel s'enroule la corde (d'épaisseur négligeable).
Considérant qu'il n'y a aucun glissement entre la corde et la poulie P_1, quelle est la relation qui existe entre l'accélération Γ_1 de S_1 et l'accélération angulaire θ_1'' de la poulie P_1 ?

3.4. Avec la même hypothèse (aucun glissement entre la corde et la poulie P_2), quelle est la relation qui existe entre l'accélération Γ_2 de S_2 et l'accélération angulaire θ_2'' de la poulie P_2 ?

3.5. Faire le bilan des efforts qui s'exercent sur l'ensemble S_2+P_3, appliquer le théorème de la résultante dynamique et en déduire l'expression de la tension T_3 de la corde (voir Fig. 2) en fonction de l'accélération Γ_2 de S_2.

3.6. Faire le bilan des moments qui s'exercent sur P_2, appliquer le théorème du moment dynamique et en déduire l'expression de la tension T_2 de la corde (voir Fig. 2) en fonction de l'accélération Γ_2 de S_2.
Pour le moment d'inertie des poulies par rapport à leur axe de rotation, utiliser la formule donnant le moment d'inertie d'un cylindre homogène par rapport à son axe, en fonction de sa masse, sans la démontrer.

3.7. Faire le bilan des efforts qui s'exercent sur l'ensemble S_1+P_1, appliquer le théorème de la résultante dynamique et en déduire l'expression de la tension T_1 de la corde (voir Fig. 2) en fonction de l'accélération Γ_2 de S_2.

3.8. Faire le bilan des moments qui s'exercent sur P_1, appliquer le théorème du moment dynamique et en déduire l'expression de l'accélération Γ_2 de S_2.

3.9. Comment évolue, en fonction du temps, la vitesse verticale V_2 de S_2 ?

3.10. Au bout de quel temps T S_2 sera-t-il assis sur le sol ?
Ce temps T est aussi celui qui aura été nécessaire pour que chaque point de l'ensemble S_2+P_3 parcoure une distance H.

3.11. Application numérique.
g = 9,81 m/s²
H = 3 m
Calculer T.
Aucune autre donnée ne doit être nécessaire.

Eléments de réponses

Question 1.1
Le rayon $r_{max}(z)$ varie linéairement de 0 pour z = 0 à R pour z = H.

$$\boxed{r_{max}(z) = R\frac{z}{H}}$$

CP46 - MQ43 - Automne 2012
Corrigé de l'Examen MEDIAN
17/11/2012

Question 1.2

$$M = \iiint_{Cône} \rho \, dv$$

Intégration en coordonnées polaires.

$$M = \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^{r\,max(z)} r \, dr \, d\theta \, dz$$

$$\boxed{M = \frac{1}{3} \pi \rho H R^2}$$

D'où on tire ρ en fonction de M : $\rho = \dfrac{3M}{\pi H R^2}$

Question 1.3

La formule donnant z_G se déduit de l'équation vectorielle définissant le centre de gravité d'un solide.

$$\overrightarrow{SG} = \frac{1}{M} \iiint_{Cône} \rho \, \overrightarrow{SP} \, dv$$

$$z_G = \frac{1}{M} \iiint_{Cône} \rho \, z \, dv$$

$$z_G = \frac{\rho}{M} \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^{r\,max(z)} z \, r \, dr \, d\theta \, dz$$

$$\boxed{z_G = \frac{3}{4} H}$$

Question 1.4

D'après la définition du moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe :

$$I_{Sz} = \iiint_{Cône} \rho \, r^2 \, dv$$

$$I_{Sz} = \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^{r\,max(z)} r^3 \, dr \, d\theta \, dz$$

ρ est remplacé par son expression en fonction de M.

$$\boxed{I_{Sz} = \frac{3}{10} M R^2}$$

Question 1.5

D'après la définition du moment d'inertie d'un solide par rapport à un plan :

$$I_{Sxy} = \iiint_{Cône} \rho \, z^2 \, dv$$

$$I_{Sxy} = \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^{r\,max(z)} z^2 \, r \, dr \, d\theta \, dz$$

ρ est remplacé par son expression en fonction de M.

$$\boxed{I_{Sxy} = \frac{3}{5} M H^2}$$

CP46 - MQ43 - Automne 2012
Corrigé de l'Examen MEDIAN
17/11/2012

Question 1.6

Le moment d'inertie I_{Sx} par rapport à l'axe Sx est la somme des moments d'inertie par rapport aux plans Sxy et Sxz.

$$I_{Sx} = \iiint_{Cône} \rho \left(y^2 + z^2\right) dv$$

$$I_{Sx} = \iiint_{Cône} \rho\, y^2\, dv + \iiint_{Cône} \rho\, z^2\, dv$$

$$I_{Sx} = I_{Sxz} + I_{Sxy}$$

I_{Sxz} se déduit de I_{Sz} calculé à la question 1.4.

En effet : $I_{Sz} = \iiint_{Cône} \rho \left(x^2 + y^2\right) dv$

Or, compte-tenu de la symétrie du cône, x et y sont équivalents, d'où : $I_{Sxz} = \frac{1}{2} I_{Sz}$

$$I_{Sx} = \frac{3}{20} M R^2 + \frac{3}{5} M H^2$$

$$\boxed{I_{Sx} = \frac{3}{5} M \left(H^2 + \frac{1}{4} R^2\right)}$$

Question 1.7

D'après le théorème de Huygens :

$$I_{Sx} = I_{Gx} + M z_G^2$$

D'où on tire I_{Gx} en fonction de I_{Sx}.

$$I_{Gx} = I_{Sx} - M z_G^2$$

$$I_{Gx} = \frac{3}{5} M \left(H^2 + \frac{1}{4} R^2\right) - M \left(\frac{3}{4} H\right)^2$$

$$\boxed{I_{Gx} = \frac{3}{20} M \left(\frac{1}{4} H^2 + R^2\right)}$$

Question 2.1

La force $\overrightarrow{F(t)}$ dérivant de l'énergie potentielle $U(t)$ s'exprime par : $\overrightarrow{F(t)} = -\overrightarrow{\text{grad}\, U(t)}$

$$\boxed{\overrightarrow{F(t)} = \begin{pmatrix} -M a \cos(\omega t) \\ 0 \\ -M\left[g + a \sin(\omega t)\right] \end{pmatrix}}$$

Question 2.2

Principe fondamental de la dynamique appliqué à un point de masse M : $\overrightarrow{F(t)} = M \overrightarrow{\Gamma(t)}$

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma(t)} = \begin{pmatrix} -a \cos(\omega t) \\ 0 \\ -g - a \sin(\omega t) \end{pmatrix}}$$

Question 2.3

Les coordonnées du vecteur vitesse se déduisent de celles du vecteur accélération par intégration.

$$\overrightarrow{V(t)} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{\omega}\sin(\omega t) + C1 \\ C2 \\ -g\,t + \frac{a}{\omega}\cos(\omega t) + C3 \end{pmatrix}$$

C1, C2 et C3 sont des constantes d'intégrations, qui se déduisent de la condition initiale :

$$\overrightarrow{V(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_0 \\ \frac{a}{\omega} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\overrightarrow{V(t)} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{\omega}\sin(\omega t) \\ V_0 \\ -g\,t + \frac{a}{\omega}\cos(\omega t) \end{pmatrix}}$$

Question 2.4

Les coordonnées du vecteur position se déduisent de celles du vecteur vitesse par intégration.

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\omega^2}\cos(\omega t) + C4 \\ V_0\,t + C5 \\ -g\frac{t^2}{2} + \frac{a}{\omega^2}\sin(\omega t) + C6 \end{pmatrix}$$

C4, C5 et C6 sont des constantes d'intégrations, qui se déduisent de la condition initiale :

$$\overrightarrow{OM_0} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\omega^2} \\ 0 \\ H \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = \frac{a}{\omega^2}\cos(\omega t) \\ y(t) = V_0\,t \\ z(t) = H - g\frac{t^2}{2} + \frac{a}{\omega^2}\sin(\omega t) \end{cases}}$$

Complément

Le point décrit un cercle dans le plan xz, autour d'une position moyenne qui décrit une parabole dans le plan yz, voir un exemple Fig. 3.

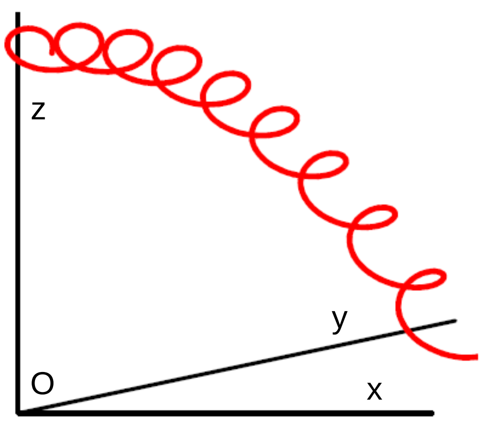

Fig. 3 : Exemple de trajectoire.

Question 3.1

Quand S_2 descend de Δz_2, La longueur de corde qui passe sur la poulie P_2 se répartit également de part et d'autre de la poulie P_1, qui monte donc de la moitié de Δz_2.

$$\boxed{\Delta z_1 = -\frac{\Delta z_2}{2}}$$

Question 3.2

La relation qui existe entre les déplacements Δz_2 et Δz_2 existe aussi entre les accélérations les Γ_1 et Γ_2, qui en sont les dérivées secondes.

$$\boxed{\Gamma_1 = -\frac{\Gamma_2}{2}}$$

Question 3.3

La réponse se déduit directement de l'hypothèse de non-glissement.

$$\boxed{\theta_1'' = \frac{\Gamma_1}{R}}$$

Question 3.4

De la même façon que pour la question précédente, la réponse se déduit directement de l'hypothèse de non-glissement.

$$\boxed{\theta_2'' = \frac{\Gamma_2}{R}}$$

Question 3.5

Les efforts appliqués sont les poids de S_2 et P_3 (dont chacun possède une masse M), ainsi que la tension T_3 de la corde.

$$-2\,M\,g + T_3 = 2\,M\,\Gamma_2$$

$$\boxed{T_3 = 2\,M\left(g + \Gamma_2\right)}$$

Question 3.6

La poulie P_2 est soumise aux moments générés par les 2 tensions de la corde T_2 et T_3.

$$T_2\,R - T_3\,R = I_P\,\theta_2''$$

I_P est le moment d'inertie de la poulie assimilée à un cylindre plein, par rapport à son axe :

$$I_P = \frac{M\,R^2}{2}$$

L'accélération angulaire θ_2'' est remplacée par son expression de la question 3.4.

La tension T_3 est remplacée par son expression de la question 3.5.

$$\boxed{T_2 = M\left(2\,g + \frac{5}{2}\Gamma_2\right)}$$

<u>Question 3.7</u>

Les efforts appliqués sont les poids de S_1 et P_1 (dont chacun possède une masse M), ainsi que les tensions T_1 et T_2 de la corde.

$-2\,M\,g + T_1 + T_2 = 2\,M\,\Gamma_1$

La tension T_2 est remplacée par son expression de la question 3.6.
L'accélération Γ_1 est remplacée par son expression de la question 3.2.

$$\boxed{T_1 = -\frac{7}{2} M\,\Gamma_2}$$

<u>Question 3.8</u>

La poulie P_1 est soumise aux moments générés par les 2 tensions de la corde T_1 et T_2.

$-T_1\,R + T_2\,R = I_P\,\theta_1''$

L'accélération angulaire θ_1'' s'exprime en fonction de Γ_2 d'après les résultats des questions 3.2 et 3.3 : $\theta_1'' = -\frac{\Gamma_2}{2\,R}$

Les tensions T_1 et T_2 sont remplacées par leurs expressions des questions 3.7 et 3.6.
L'accélération Γ_2 est alors la seule inconnue et peut donc être calculée.

$$\boxed{\Gamma_2 = -\frac{8}{25} g}$$

<u>Question 3.9</u>

La vitesse V_2 est obtenue par intégration de l'accélération Γ_2, en tenant compte de la condition initiale (vitesse nulle à t = 0).

$$\boxed{V_2 = -\frac{8}{25} g\,t}$$

<u>Question 3.10</u>

L'altitude z_2 est obtenue par intégration de la vitesse V_2, en tenant compte de la condition initiale (altitude égale à H à t = 0).

$$z_2 = H - \frac{4}{25} g\,t^2$$

Le temps T nécessaire pour que z_2 s'annule est donné par :

$$0 = H - \frac{4}{25} g\,T^2$$

$$\boxed{T = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{H}{g}}}$$

<u>Question 3.11</u>

$$\boxed{T = 1{,}38\ \mathrm{s}}$$