CP46 - MQ43 - Automne 2012
Sujet de l'Examen MEDIAN
17/11/2012

3 exercices indépendants - Durée : 2 h - Documents autorisés

Conseils et consignes :

- Lire l'énoncé.
- Respecter les notations de l'énoncé.
- Identifier les questions.
- Encadrer les résultats.
- Numéroter les feuilles (1 feuille = 4 pages) en indiquant le nombre total de feuilles (Exemple : 1/3, 2/3, 3/3).

1. Propriétés d'un cône

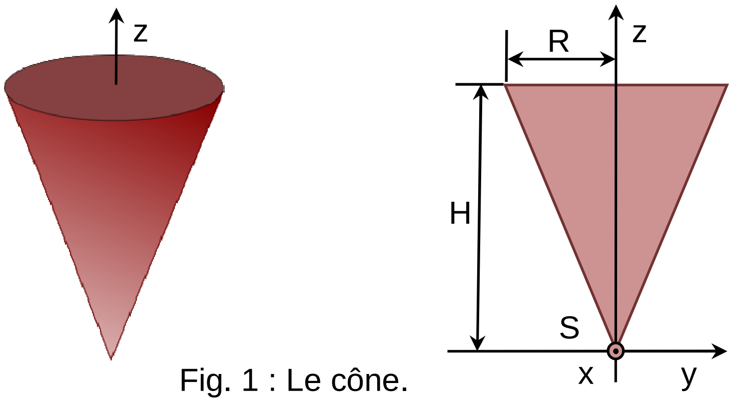

Fig. 1 : Le cône.

Conformément à la Fig. 1 ci-contre, un cône est muni d'un repère (S, x, y, z).
S est le sommet du cône et Sz son axe de révolution.
Il est constitué d'un matériau homogène de masse volumique ρ.
Sa base est un cercle de rayon R et H est sa hauteur.

1.1. A une distance z du plan Sxy, la section du cône parallèle à ce plan est un disque de rayon $r_{max}(z)$.
Exprimer $r_{max}(z)$ en fonction de z, R et H.

1.2. Démontrer la formule donnant la masse M du cône, en fonction de ρ, R et H.
En déduire l'expression de la masse volumique ρ en fonction de la masse et des dimensions du cône.

1.3. Quelle est la coordonnée z_G, sur l'axe Sz, du centre de gravité G du cône ?

1.4. Calculer le moment d'inertie I_{Sz} du cône par rapport à son axe de révolution.
En utilisant l'expression de ρ trouvée à la question 1.2, donner l'expression de I_{Sz} en fonction de M et de R uniquement.

1.5. Calculer le moment d'inertie I_{Sxy} du cône par rapport au plan Sxy.
Donner l'expression de I_{Sxy} en fonction de M et de H uniquement.

1.6. En utilisant les résultats des questions précédentes, calculer le moment d'inertie I_{Sx} du cône par rapport à l'axe Sx passant par son sommet.
Donner l'expression de I_{Sx} en fonction de M, R et H uniquement.

1.7. En appliquant le théorème de Huygens, calculer le moment d'inertie I_{Gx} du cône par rapport à l'axe Gx passant par son centre de gravité G et parallèle à la direction x.
Donner l'expression de I_{Gx} en fonction de M, R et H uniquement.

2. Pesanteur variable

Sur une planète lointaine, l'énergie potentielle de pesanteur U d'un point de masse M dépend du temps t et s'exprime par : $U(t) = M\,a\cos(\omega t)\,x + M\,[\,g + a\sin(\omega t)\,]\,z$

Dans cette expression, g, a et ω sont des constantes positives.

x, y et z sont les coordonnées du point dans un repère fixe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2.1. Quel est le champ de forces $\overrightarrow{F(t)}$ qui dérive de cette énergie potentielle ?

2.2. Un point de masse M évolue librement dans ce champ de forces.
Quel est son vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma(t)}$, en fonction du temps t et des constantes g, a et ω ?

2.3. A l'instant t = 0, ce point est libéré avec une vitesse initiale $\overrightarrow{V_0} = V_0\,\vec{j} + \dfrac{a}{\omega}\vec{k}$
Quelle est sa vitesse ultérieure $\overrightarrow{V(t)}$, à un instant quelconque t ?

2.4. A l'instant t = 0, ce point était situé au point M_0 tel que $\overrightarrow{OM_0} = \dfrac{a}{\omega^2}\vec{i} + H\,\vec{k}$
Exprimer les fonctions x(t), y(t) et z(t) qui définissent sa trajectoire.

3. Numéro de cirque

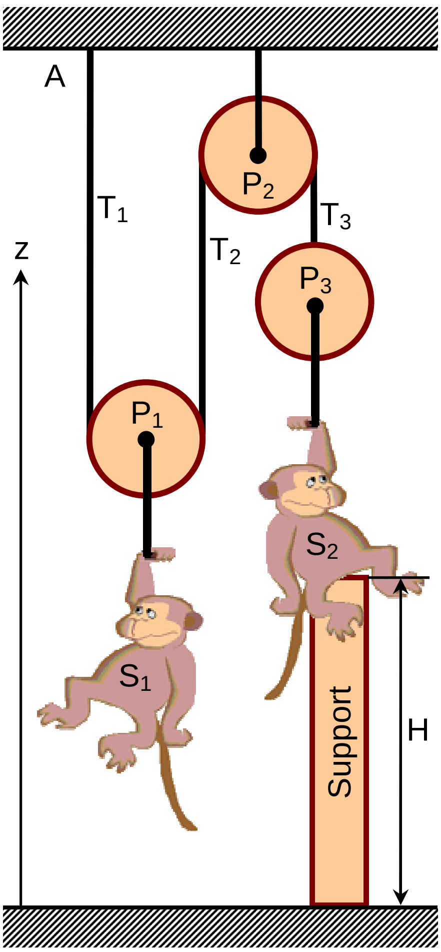

Fig. 2 : 3 poulies et 2 singes.

Au début du numéro, 2 singes (S_1 et S_2) et 3 poulies (P_1, P_2 et P_3) sont immobiles, disposés suivant la Fig. 2 ci-contre.
L'extrémité d'une corde solide et inextensible est fixée au plafond (point A).
La corde passe sur les 2 poulies P_1 et P_2, qui tournent sans aucun frottement sur leur axe.
Son autre extrémité est fixée à la poulie P_3, qui ne tourne pas.
L'axe de la poulie P_2 est fixé au plafond.
Les singes S_1 et S_2 sont suspendus, par un système parfaitement rigide, aux axes des poulies P_1 et P_3.
Le singe S_2 est assis sur un support de hauteur H.
Les 2 singes et les 3 poulies ont chacun la même masse M.
L'ensemble du cirque est soumis à l'accélération de la pesanteur terrestre, dirigée verticalement vers le bas, et d'intensité g.

A l'instant t = 0, le dresseur retire adroitement le support et le singe S_2 commence à descendre gracieusement, sans aucun balancement, ce qui fait monter le singe S_1.
L'étude du mouvement ultérieur permettra de savoir au bout de combien de temps le singe S_2 sera assis sur le sol.

3.1. Sachant que la longueur de la corde est constante, déterminer l'augmentation d'altitude Δz_1 de S_1 quand S_2 descend de Δz_2.

3.2. En déduire la relation qui existe entre les accélérations verticales Γ_1 et Γ_2 des 2 singes.

3.3. Les 3 poulies sont assimilées à des cylindres de rayon extérieur R, qui est aussi le rayon sur lequel s'enroule la corde (d'épaisseur négligeable).
Considérant qu'il n'y a aucun glissement entre la corde et la poulie P_1, quelle est la relation qui existe entre l'accélération Γ_1 de S_1 et l'accélération angulaire θ_1'' de la poulie P_1 ?

3.4. Avec la même hypothèse (aucun glissement entre la corde et la poulie P_2), quelle est la relation qui existe entre l'accélération Γ_2 de S_2 et l'accélération angulaire θ_2'' de la poulie P_2 ?

3.5. Faire le bilan des efforts qui s'exercent sur l'ensemble S_2+P_3, appliquer le théorème de la résultante dynamique et en déduire l'expression de la tension T_3 de la corde (voir Fig. 2) en fonction de l'accélération Γ_2 de S_2.

3.6. Faire le bilan des moments qui s'exercent sur P_2, appliquer le théorème du moment dynamique et en déduire l'expression de la tension T_2 de la corde (voir Fig. 2) en fonction de l'accélération Γ_2 de S_2.
Pour le moment d'inertie des poulies par rapport à leur axe de rotation, utiliser la formule donnant le moment d'inertie d'un cylindre homogène par rapport à son axe, en fonction de sa masse, sans la démontrer.

3.7. Faire le bilan des efforts qui s'exercent sur l'ensemble S_1+P_1, appliquer le théorème de la résultante dynamique et en déduire l'expression de la tension T_1 de la corde (voir Fig. 2) en fonction de l'accélération Γ_2 de S_2.

3.8. Faire le bilan des moments qui s'exercent sur P_1, appliquer le théorème du moment dynamique et en déduire l'expression de l'accélération Γ_2 de S_2.

3.9. Comment évolue, en fonction du temps, la vitesse verticale V_2 de S_2 ?

3.10. Au bout de combien de quel temps T S_2 sera-t-il assis sur le sol ?
Ce temps T est aussi celui qui aura été nécessaire pour que chaque point de l'ensemble S_2+P_3 parcoure une distance H.

3.11. Application numérique.
g = 9,81 m/s²
H = 3 m
Calculer T.
Aucune autre donnée ne doit être nécessaire.