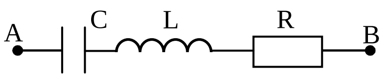
NOM :	**Correction** **Examen Médian EL42**	Note : /20,5
Durée : **1H40**. Calculatrice non autorisée car inutile. Aucun document personnel n'est autorisé. Téléphone portable et traducteur interdits		

Pour chaque réponse, on expliquera la démarche qui conduit au résultat proposé. Les expressions mathématiques seront exprimées littéralement avant d'être éventuellement calculées de façon numérique.

EXERCICE 1 2

Considérons le dipôle AB suivant:



1 **1)** Déterminer $\underline{Z}_{AB}$ l'impédance complexe du dipôle AB

$$\boxed{\underline{Z}_{AB} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

1 **2)** Déterminer la fréquence f_0 pour laquelle l'impédance complexe $\underline{Z}_{AB}$ est réelle pure. Donner alors l'expression de $\underline{Z}_{AB}$ à cette fréquence.

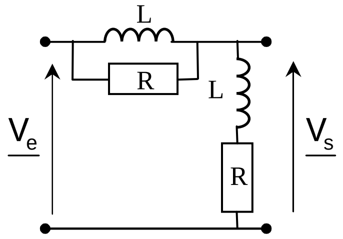
Il suffit qu'à la pulsation $\omega_0 = 2\pi f_0$ on ait :

$$L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0 \text{ d'où } LC\omega_0^2 = 1 \text{ et enfin } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

D'où $\boxed{f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$ et pour cette fréquence, $\boxed{\underline{Z}_{AB} = R}$

EXERCICE 2 4

Considérons le montage suivant:



On se place en régime sinusoïdal établi.

2 **1)** Déterminez l'expression de la fonction de transfert $\underline{T} = \dfrac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$.

On peut utiliser la formule du diviseur de tension ou celle de Millman.

$$\underline{T} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{R + jL\omega}{R + jL\omega + \dfrac{jRL\omega}{R + jL\omega}} = \frac{(R + jL\omega)^2}{(R + jL\omega)^2 + jRL\omega}$$

$$\boxed{\underline{T} = \frac{R^2 - (L\omega)^2 + 2jRL\omega}{R^2 - (L\omega)^2 + 3jRL\omega}}$$

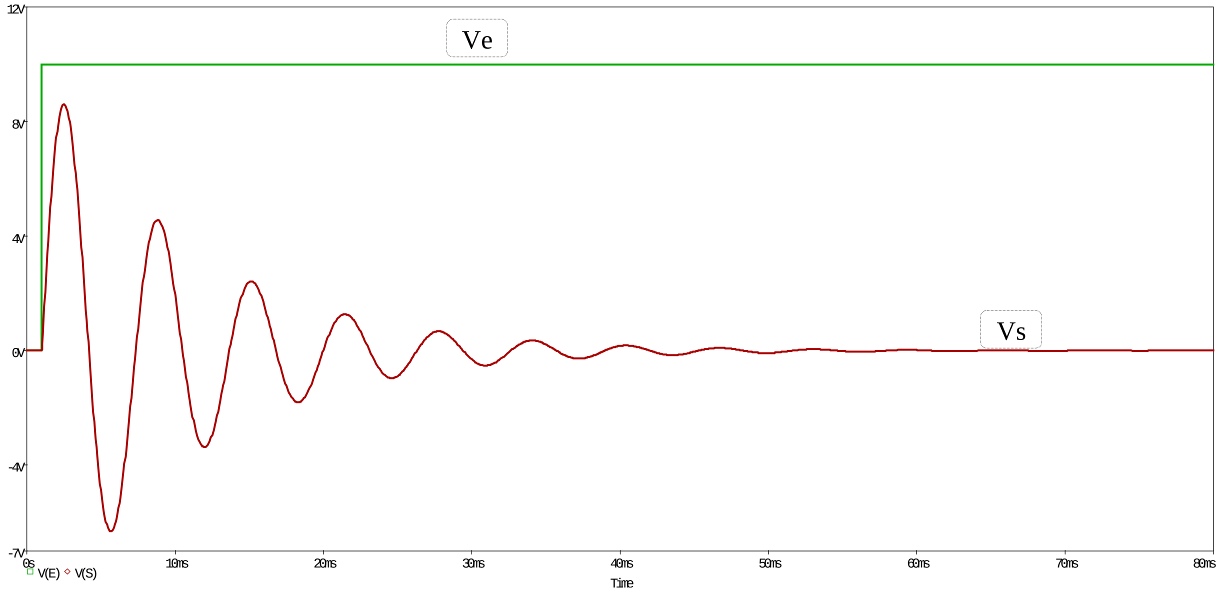
2 Déterminez le module et l'argument de la fonction de transfert $\underline{T}$ lorsque $\omega = \frac{R}{L}$.

Lorsque $\omega = \frac{R}{L}$, $\boxed{\underline{T} = \frac{2}{3}}$.

Le module vaut $\|\underline{T}\| = \frac{2}{3}$ et l'argument $Arg(\underline{T}) = 0$

EXERCICE 3 3

Considérons le filtre qui a pour réponse à un échelon (Ve) d'amplitude 10V, la courbe (Vs) suivante :



1 **1)** Comment le filtre se comporte-t-il pour les fréquences infiniment hautes ? (justifier votre réponse)

L'échelon fait un saut de 0 à 10V. Cette variation infiniment rapide nous renseigne sur le comportement du filtre aux fréquences infiniment hautes. On remarque que le filtre ne transmet pas cette transition car $V_S(0^+)=0$.

1 **2)** Comment le filtre se comporte-t-il pour les fréquences infiniment basses ? (justifier votre réponse)

Quant t tend vers $+\infty$, l'échelon est assimilable à un signal de fréquence nulle. On remarque que le filtre ne transmet pas le continu car $V_S(+\infty)=0$.

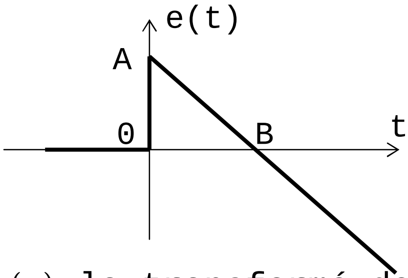
1 **3)** Quel type de filtre peut donner une telle réponse (justifier votre réponse) ?

Il s'agit donc d'un filtre passe-bande dont l'amortissement semble assez faible (présence d'oscillations dans la réponse à l'échelon).

EXERCICE 4 5,5

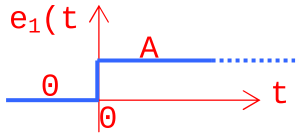
Considérons le filtre qui a pour fonction de transfert opérationnelle $T(p) = \dfrac{\tau p}{1 + \tau p}$ avec $0 < \tau < 1$

On attaque le filtre par le signal $e(t)$ suivant :

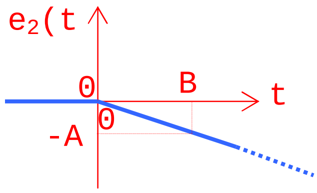


1 **1)** Déterminer $E(p)$ la transformé de Laplace de $e(t)$.

On décompose e(t) en une somme de 2 fonctions :



$$\Rightarrow E_1(p) = \frac{A}{p} \quad \begin{cases} \text{Transformée d'un échelon} \\ \text{d'amplitude A.} \end{cases}$$



$$\Rightarrow E_2(p) = -\frac{A}{Bp^2} \quad \begin{cases} \text{Transformée d'une rampe} \\ \text{causale de pente } -\dfrac{A}{B} \end{cases}$$

D'où $\boxed{E(p) = \dfrac{A}{p} - \dfrac{A}{Bp^2}}$

On applique maintenant le signal $e(t)$ à l'entrée du filtre défini précédemment. On appellera $s(t)$ la réponse de ce filtre à l'excitation $e(t)$.

1 **2)** Déterminer $S(p)$ la transformé de Laplace de $s(t)$.

$$\boxed{S(p) = E(p)\,T(p) = \left(\frac{A}{p} - \frac{A}{Bp^2}\right)\frac{\tau p}{1 + \tau p} = \frac{A\tau\,(Bp - 1)}{Bp\,(1 + \tau p)}}$$

1 **3)** Déterminer les limites en 0^+ et en $+\infty$ de $s(t)$ en restant dans le domaine opérationnel (Laplace).

$$\lim_{t \to +\infty} s(t) = \lim_{p \to 0^+} pS(p) = \lim_{p \to 0^+} \frac{A\tau\,(Bp - 1)}{B\,(1 + \tau p)} = -\frac{A\tau}{B} \qquad \text{d'où } \boxed{\lim_{t \to +\infty} s(t) = -\frac{A\tau}{B}}$$

$$\lim_{t \to 0^+} s(t) = \lim_{p \to +\infty} pS(p) = \lim_{p \to +\infty} \frac{A\tau\,(Bp - 1)}{B\,(1 + \tau p)} = A \qquad \text{d'où } \boxed{\lim_{t \to 0^+} s(t) = A}$$

1 **4)** Déterminer la pente de la tangente en 0^+ de $s(t)$ en restant dans le domaine opérationnel (Laplace).

$$\lim_{t\to 0^+} s'(t) = \lim_{p\to+\infty} p\left[pS(p) - s\left(0^+\right)\right] = \lim_{p\to+\infty} p\left[\frac{A\tau(Bp-1)}{B(1+\tau p)} - A\right]$$

$$\lim_{t\to 0^+} s'(t) = \lim_{p\to+\infty} p\left[\frac{A\tau(Bp-1) - AB(1+\tau p)}{B(1+\tau p)}\right] = \lim_{p\to+\infty} p\left[\frac{-A(\tau+B)}{B(1+\tau p)}\right]$$

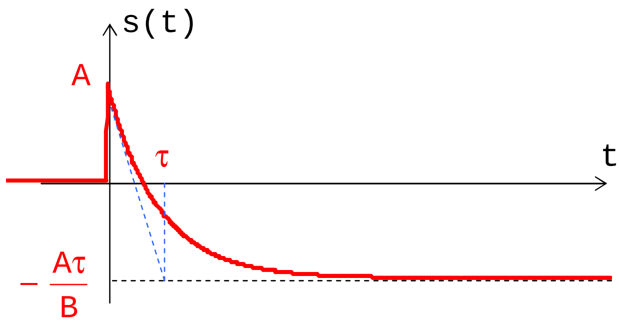
$$\text{D'où } \boxed{\lim_{t\to 0^+} s'(t) = -\frac{A(\tau+B)}{B\tau}}$$

1,5 **5)** Déterminer l'expression de $s(t)$.

$$S(p) = \frac{A\tau}{1+\tau p} - \frac{A\tau}{Bp(1+\tau p)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} s(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{A\tau}{B}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\text{D'où } \boxed{s(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}\left(1 + \frac{\tau}{B}\right) - \frac{A\tau}{B}}$$

Représenter graphiquement $s(t)$.



EXERCICE 5 6

Considérons un système qui a pour diagrammes de Bode les courbes fournies en annexes. On appellera $\underline{T}(j\omega)$ la fonction de transfert complexe de ce système.

1 **1)** Donner la valeur de la fonction de transfert complexe $\underline{T}(j\omega)$ pour la fréquence $f_1 = 30\,\text{Hz}$.

$$\boxed{\underline{T}(j2\pi f_1) = 10^{\frac{-20}{20}} e^{j\frac{\pi}{2}} = 0{,}1j}$$

2 **2)** Pour quelle fréquence f_2 la fonction de transfert complexe $\underline{T}(j\omega)$ est-elle réelle pure ? Déterminez alors la valeur de la fonction de transfert pour cette fréquence.(expliquez et justifiez)

$\underline{T}(j\omega)$ est réelle quand son argument vaut 0 modulo Pi. Dans notre cas $\underline{T}(j\omega)$ est réelle à 300Hz quand son argument vaut 0.

A 300Hz, $\underline{T}(j\omega) = 10^{\frac{40}{20}} e^{j0} = 100$

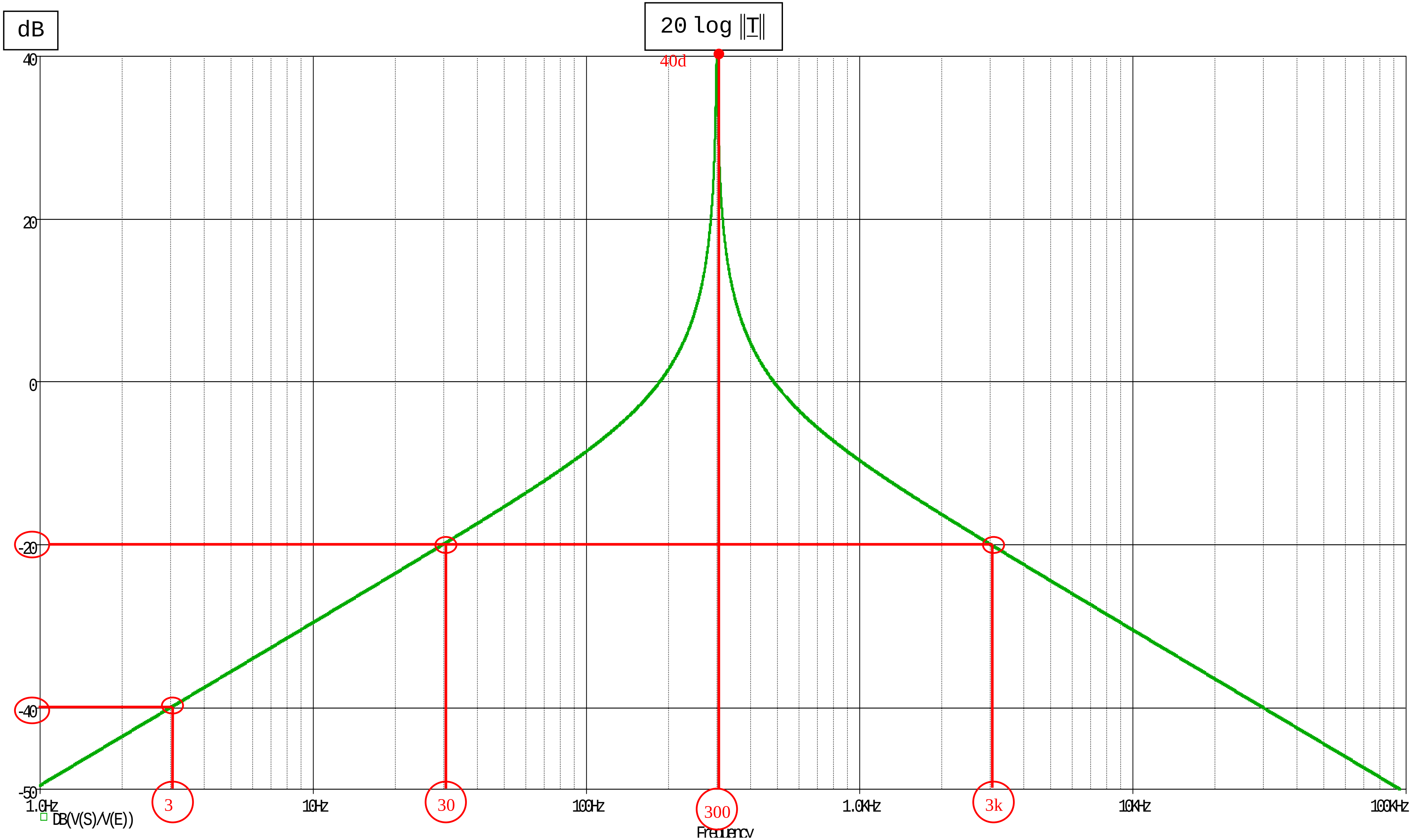
3 **3)** On applique à l'entrée du système le signal e(t) suivant :

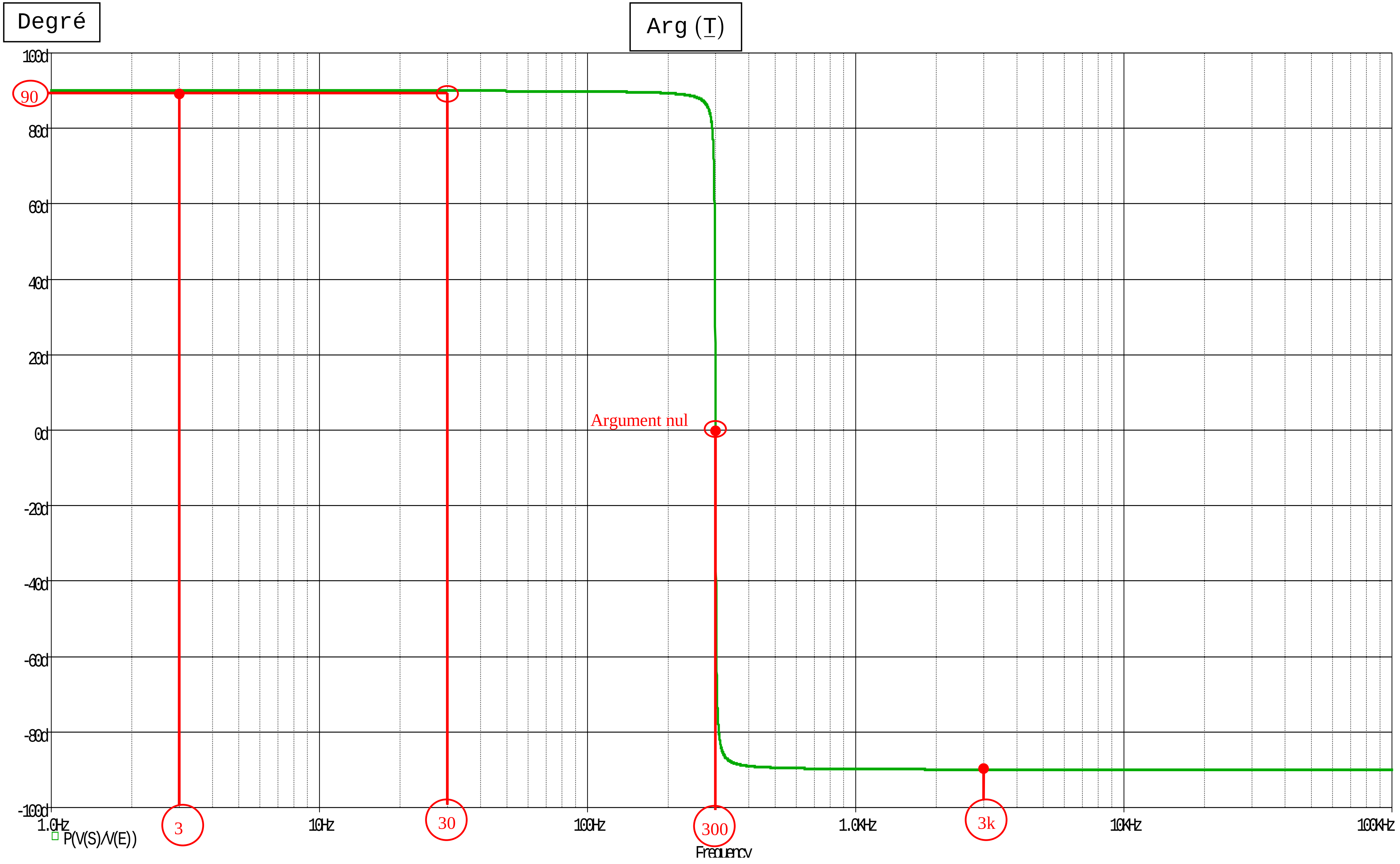
$e(t) = E + A\cos\left(2\pi f_3 t + \frac{\pi}{4}\right) + B\cos(2\pi f_4 t)$ où E, A et B sont des constantes réelles positives, f_3=3Hz et f_4=3kHz.

Déterminer, en justifiant chacun des termes, l'expression du signal de sortie s(t) du système en régime établi.

- Le terme constant (E) peut être considéré comme un terme harmonique de fréquence nulle. Sur les diagrammes de Bode, on constate que, pour les fréquences nulles, le gain de la fonction de transfert vaut $-\infty$dB (donc une amplification de $10^{\frac{-\infty dB}{20}} = 0$) et le déphasage est de $\frac{\pi}{2}$.
- Le terme $A\cos\left(2\pi f_3 t + \frac{\pi}{4}\right)$ est un signal sinusoïdal de fréquence 3Hz. Son aspect sinusoïdal ne sera pas affecté (propriétés des SLITs). Il sera simplement atténué (ou amplifié) et déphasé. A 3Hz, le filtre déphase d'environ $\frac{\pi}{2}$ et le gain est de -40dB soit une amplification de 0,01.
- Le terme $B\cos(2\pi f_4 t)$ est un signal sinusoïdal de fréquence 3kHz. Son aspect sinusoïdal ne sera pas affecté (propriétés des SLITs). Il sera simplement atténué (ou amplifié) et déphasé. A 3kHz, le filtre déphase de $-\frac{\pi}{2}$ et le gain vaut -20dB soir une amplification de 0,1.

d'où $\boxed{s(t) = E.0 + A.0,01\cos\left(2\pi f_2 t + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) + B.0,1\cos\left(2\pi f_3 t - \frac{\pi}{2}\right)}$


dB
20 log ‖T‖
40d
40
20
0
-20
-40
-50
1.0Hz
10Hz
100Hz
1.0KHz
10KHz
100KHz
3
30
300
3k
DB(V(S)/V(E))
Frequency


Degré
Arg (T)
100d
90
80d
60d
40d
20d
0d
Argument nul
-20d
-40d
-60d
-80d
-100d
1.0Hz
3
10Hz
30
100Hz
300
1.0KHz
3k
10KHz
100KHz
P(V(S)/V(E))
Frequency