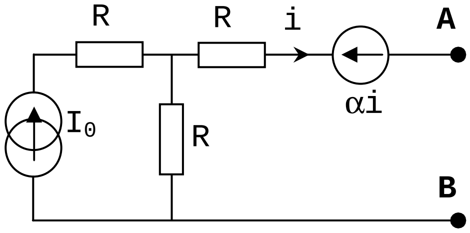
NOM :	**Correction** **Examen Médian EL80**	Note : /22
Durée : **1H40**. Calculatrice non autorisée car inutile. Aucun document personnel n'est autorisé. Téléphone portable et traducteur interdits		

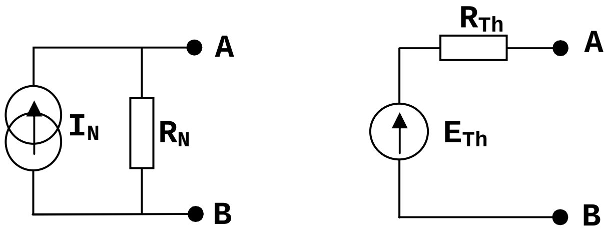
Pour chaque réponse, on expliquera la démarche qui conduit au résultat proposé. Les expressions mathématiques seront exprimées littéralement avant d'être éventuellement calculées de façon numérique.

EXERCICE 1 2,5

Considérons le montage suivant:



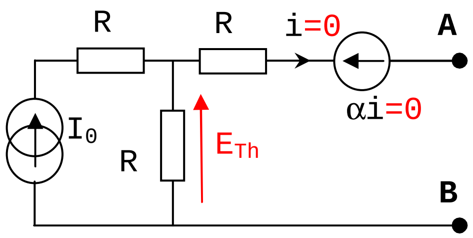
2,5 **1)** Déterminer les dipôles AB équivalent de Thévenin et de Norton en fonction de I_0, R et α. On respectera les orientations et les notations suivantes :



Le cours nous dit que $\begin{cases} R_{Th} = R_N \\ E_{Th} = R_{Th}.I_N \end{cases}$. Il suffit donc de trouver 2 des 3 inconnues pour connaitre la troisième.

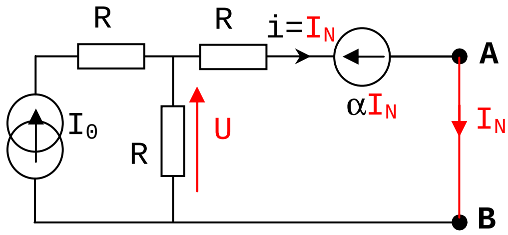
a. E_{Th} est la tension à vide du dipôle c'est-à-dire V_{AB} quand i=0.

Si i=0, $\alpha i=0$ donc E_{Th} est alors la tension aux bornes de la résistance du bas qui est parcourue par le courant I_0. D'où $\boxed{E_{Th} = RI_0}$.



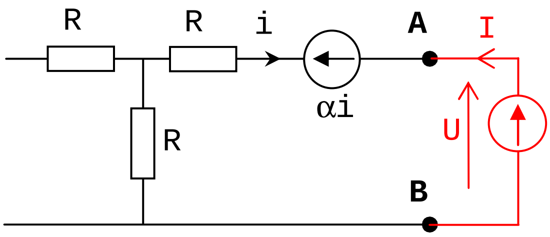
b. I_N est le courant de court circuit du dipôle AB.

$U = R(I_0 - I_N) = RI_N + \alpha I_N$ d'où on déduit $\boxed{I_N = \frac{RI_0}{(2R+\alpha)}}$.



c. Pour obtenir R_{Th}, on éteint les sources indépendantes et on « mesure » la résistance entre les bornes A et B.

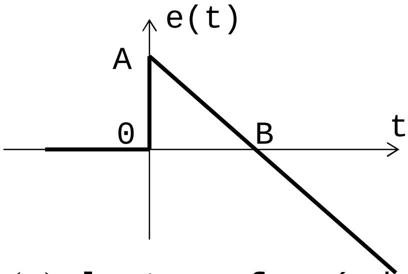
$R_{Th} = \frac{U}{I}$ or i=-I d'où l'équation de la maille $U - \alpha I - 2RI = 0$ d'où on déduit $\boxed{R_{Th} = 2R + \alpha}$.



EXERCICE 2 5

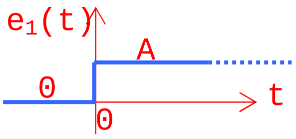
Considérons le filtre qui a pour fonction de transfert opérationnelle $T(p) = \dfrac{\tau p}{1 + \tau p}$ avec $0 < \tau < 1$

On attaque le filtre par le signal $e(t)$ suivant :

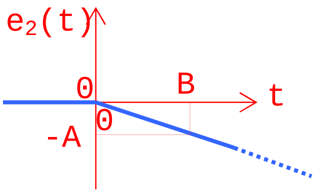


1 **1)** Déterminer $E(p)$ la transformé de Laplace de $e(t)$.

On décompose e(t) en une somme de 2 fonctions :



$\Rightarrow E_1(p) = \dfrac{A}{p}$ $\begin{cases} \text{Transformée d'un échelon} \\ \text{d'amplitude A.} \end{cases}$



$\Rightarrow E_2(p) = -\dfrac{A}{Bp^2}$ $\begin{cases} \text{Transformée d'une rampe} \\ \text{causale de pente } -\dfrac{A}{B} \end{cases}$

D'où $\boxed{E(p) = \dfrac{A}{p} - \dfrac{A}{Bp^2}}$

1,5 **2)** Déterminer les limites en 0^+ et en $+\infty$ de la réponse $s(t)$ du filtre au signal d'excitation $e(t)$ en restant dans le domaine opérationnel (Laplace).

$$S(p) = E(p)T(p) = \left(\frac{A}{p} - \frac{A}{Bp^2}\right)\frac{\tau p}{1 + \tau p} = \frac{A\tau(Bp - 1)}{Bp(1 + \tau p)}$$

$$\lim_{t\to+\infty} s(t) = \lim_{p\to0^+} pS(p) = \lim_{p\to0^+} \frac{A\tau(Bp - 1)}{B(1 + \tau p)} = -\frac{A\tau}{B} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\lim_{t\to+\infty} s(t) = -\frac{A\tau}{B}}$$

$$\lim_{t\to0^+} s(t) = \lim_{p\to+\infty} pS(p) = \lim_{p\to+\infty} \frac{A\tau(Bp - 1)}{B(1 + \tau p)} = A \quad \text{d'où} \quad \boxed{\lim_{t\to0^+} s(t) = A}$$

1 **3)** Déterminer la pente de la tangente en 0^+ de la réponse $s(t)$ du filtre au signal d'excitation $e(t)$ en restant dans le domaine opérationnel (Laplace).

$$\lim_{t\to 0^+} s'(t) = \lim_{p\to+\infty} p\left[pS(p) - s\left(0^+\right)\right] = \lim_{p\to+\infty} p\left[\frac{A\tau(Bp-1)}{B(1+\tau p)} - A\right]$$

$$\lim_{t\to 0^+} s'(t) = \lim_{p\to+\infty} p\left[\frac{A\tau(Bp-1) - AB(1+\tau p)}{B(1+\tau p)}\right] = \lim_{p\to+\infty} p\left[\frac{-A(\tau+B)}{B(1+\tau p)}\right]$$

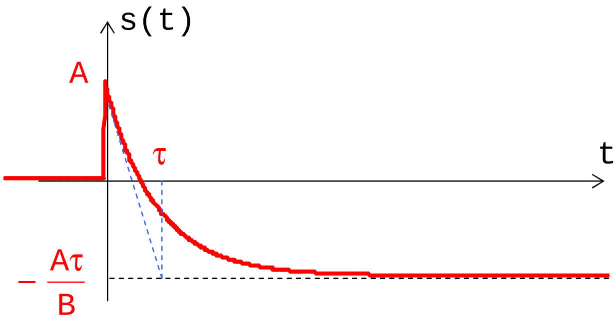
D'où $$\boxed{\lim_{t\to 0^+} s'(t) = -\frac{A(\tau+B)}{B\tau}}$$

1,5 **4)** Déterminer l'expression de $s(t)$.

$$S(p) = \frac{A\tau}{1+\tau p} - \frac{A\tau}{Bp(1+\tau p)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} s(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{A\tau}{B}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

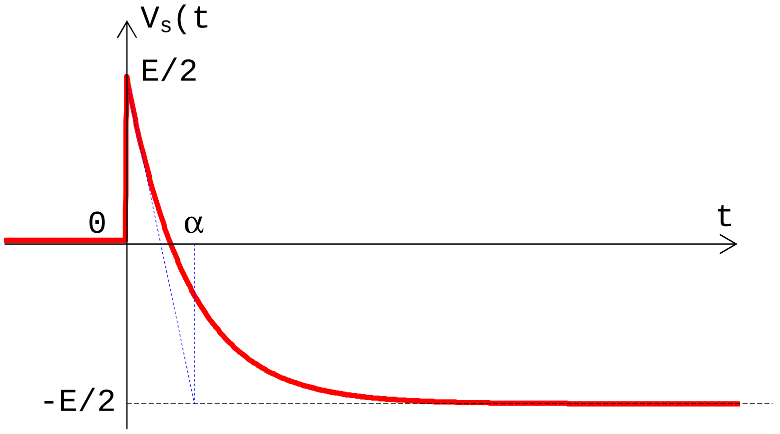
D'où $$\boxed{s(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}\left(1+\frac{\tau}{B}\right) - \frac{A\tau}{B}}$$

Représenter graphiquement $s(t)$.



EXERCICE 3 7

Considérons un filtre linéaire qui a pour réponse à un échelon d'amplitude E la fonction suivante :



$$v_s(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t<0 \\ E\left(e^{-\frac{t}{\alpha}} - \frac{1}{2}\right) & \text{pour } t>0 \end{cases}$$

En observant la réponse $v_S(t)$ à l'échelon, répondez aux 2 premières questions suivantes sans calculer la fonction de transfert

1,5 **1)** Comment le filtre se comporte-t-il pour les fréquences infiniment hautes ? Déterminer le coefficient d'amplification pour ces fréquences. (justifier votre réponse)

A t=0, l'échelon fait un saut de 0 à E. Cette variation infiniment rapide nous renseigne sur le comportement du filtre aux fréquences infinies. On remarque que le filtre les transmet avec un facteur 0,5 car $\lim_{t\to 0^+} V_s(t) = \frac{E}{2}$.

1,5 **2)** Comment le filtre se comporte-t-il pour les fréquences infiniment basses ? Déterminer le coefficient d'amplification pour ces fréquences. (justifier votre réponse)

Quant t tend vers +∞, l'échelon est assimilable à un signal de fréquence nulle. On remarque que le filtre transmet le continu avec un coefficient -0,5 car $\lim_{t\to +\infty} V_s(t) = -\frac{E}{2}$.

3) Déterminer $T(p)$ la fonction de transfert opérationnelle du filtre qui admet $v_S(t)$ pour réponse à l'échelon d'amplitude E.

$$v_s(t) = \begin{Bmatrix} 0 & \text{pour } t<0 \\ E\left(e^{-\frac{t}{\alpha}} - \frac{1}{2}\right) & \text{pour } t>0 \end{Bmatrix} = \left(\frac{\alpha E}{\alpha} e^{-\frac{t}{\alpha}} - \frac{E}{2}\right) u(t)$$

2

D'où $V_s(p) = \alpha E \frac{1}{1+\alpha p} - \frac{E}{2p}$ or $V_s(p) = T(p)\frac{E}{p}$ d'où

$$T(p) = \left(\alpha\cancel{E}\frac{1}{1+\alpha p} - \frac{\cancel{E}}{2p}\right)\frac{p}{\cancel{E}} = \frac{\alpha p}{1+\alpha p} - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{T(p) = \frac{\alpha p}{1+\alpha p} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha p - 1}{\alpha p + 1}}$$

Déterminer le module et l'argument de $\underline{T}(j\omega)$ la fonction de transfert harmonique associée à $T(p)$.

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{2}\frac{j\alpha\omega - 1}{j\alpha\omega + 1}$$

2 $\left\|\underline{T}(j\omega)\right\| = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{(-1)^2 + (\alpha\omega)^2}}{\sqrt{1+(\alpha\omega)^2}}$ d'où $\boxed{\left\|\underline{T}(j\omega)\right\| = \frac{1}{2}}$

$$\mathrm{Arg}\left(\underline{T}(j\omega)\right) = \pi + \mathrm{arctg}(-\alpha\omega) - \mathrm{arctg}(\alpha\omega)$$

D'où $\boxed{\mathrm{Arg}\left(\underline{T}(j\omega)\right) = \pi - 2\,\mathrm{arctg}(\alpha\omega)}$

EXERCICE 4 7,5

Considérons un système qui a pour diagrammes de Bode les courbes fournies en annexes. On appellera $\underline{T}(j\omega)$ la fonction de transfert complexe de ce système. Les squelettes de bode sont donnés en annexes.

1 **1)** Donner la valeur de la fonction de transfert complexe $\underline{T}(j\omega)$ pour la pulsation $\omega_1 = 6283\,\mathrm{rd\,s^{-1}}$.

$\omega_1 = 6283\,\mathrm{rd\,s^{-1}}$ correspond à une fréquence de $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{6283}{2\pi} \approx 1\mathrm{kHz}$

A cette fréquence, les diagrammes de Bode donnent un module de 17dB et un argument de -45°.

$$20\log\left(\left|\underline{T}(j\omega_1)\right|\right) = 17\mathrm{dB} \quad \text{et} \quad \mathrm{Arg}\left(\underline{T}(j\omega_1)\right) = -45° = -\frac{\pi}{4}\,\mathrm{rd}$$

D'où $\left|\underline{T}(j\omega_1)\right| = 10^{\frac{17\mathrm{dB}}{20}}$

Et enfin $\boxed{\underline{T}(j\omega_1) = 10^{\frac{17\mathrm{dB}}{20}}e^{-j\frac{\pi}{4}}}$

3 **2)** On applique à l'entrée du système le signal e(t) suivant :

$e(t) = E + A\cos\left(2\pi f_2 t + \frac{\pi}{4}\right) + B\cos(2\pi f_3 t)$ où E, A et B sont des constantes réelles positives, f_2=10kHz et f_3=1MHz.

Déterminer, en justifiant chacun des termes, l'expression du signal de sortie s(t) du système en régime établi.

- Le terme constant (E) peut être considéré comme un terme harmonique de fréquence nulle. Sur les diagrammes de Bode, on constate que, pour les fréquences nulles, le gain de la fonction de transfert vaut 20dB (donc une amplification de $10^{\frac{20dB}{20}} = 10$) et le déphasage est de 0.

- Le terme $A\cos\left(2\pi f_2 t + \frac{\pi}{4}\right)$ est un signal sinusoïdal de fréquence 10kHz. Son aspect sinusoïdal ne sera pas affecté (propriétés des SLITs). Il sera simplement atténué (ou amplifié) et déphasé. A 10kHz, le filtre déphase d'environ -79° et n'affecte pas l'amplitude (0dB).
- Le terme $B\cos(2\pi f_3 t)$ est un signal sinusoïdal de fréquence 1MHz. Son aspect sinusoïdal ne sera pas affecté (propriétés des SLITs). Il sera simplement atténué (ou amplifié) et déphasé. A 1MHz, le filtre déphase de -6° et modifie l'amplitude d'un facteur $10^{\frac{-20}{20}} = 0,1$.

d'où $\boxed{s(t) = E.10 + A.1\cos\left(2\pi f_2 t + \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{360}79\right) + B.0,1\cos\left(2\pi f_3 t - \frac{2\pi}{360}6\right)}$

2 **3)** On applique un échelon d'amplitude E à l'entrée du système. En raisonnant sur les diagrammes de Bode, déterminer les limites en zéro et en plus l'infini de la réponse du système (justifier vos réponses).

<u>Limite en 0 :</u>

Le comportement du système pour la variation infiniment rapide de l'échelon est le même que son comportement pour les fréquences infinies (atténuation de -20dB et déphasage nul).

Donc $\boxed{\lim_{t\to 0^+} s(t) = E\,10^{\frac{-20dB}{20}} = 0,1\,E}$

<u>Limite en + l'infini :</u>

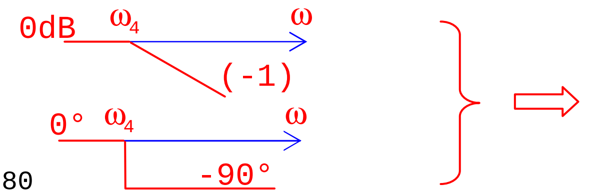
Quand t tend vers l'infini, l'échelon devient assimilable à une constante. Le signal d'entrée est donc équivalent à un signal harmonique de fréquence nulle.

On constate que, pour les fréquences nulles, le gain de la fonction de transfert vaut 20dB (donc une amplification de $10^{\frac{20dB}{20}} = 10$) et le déphasage est de 0.

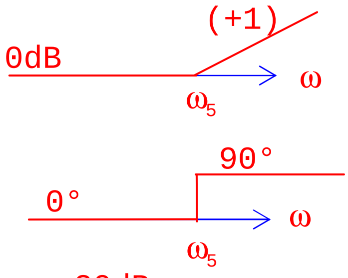
Donc $\boxed{\lim_{t\to +\infty} s(t) = 10\,E}$

1,5 **4)** Déterminer $T(p)$, une fonction de transfert opérationnelle qui possède les mêmes squelettes de Bode. (expliquez et justifiez votre méthode).

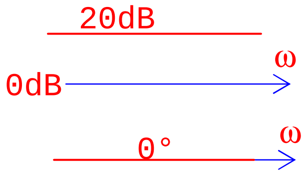
On peut décomposer les diagrammes en une somme de 3 diagrammes élémentaires :



$\Longrightarrow \dfrac{1}{1 + \frac{p}{\omega_4}}$ avec $\omega_4 = 2\pi f_4$ et $f_4 = 1kHz$

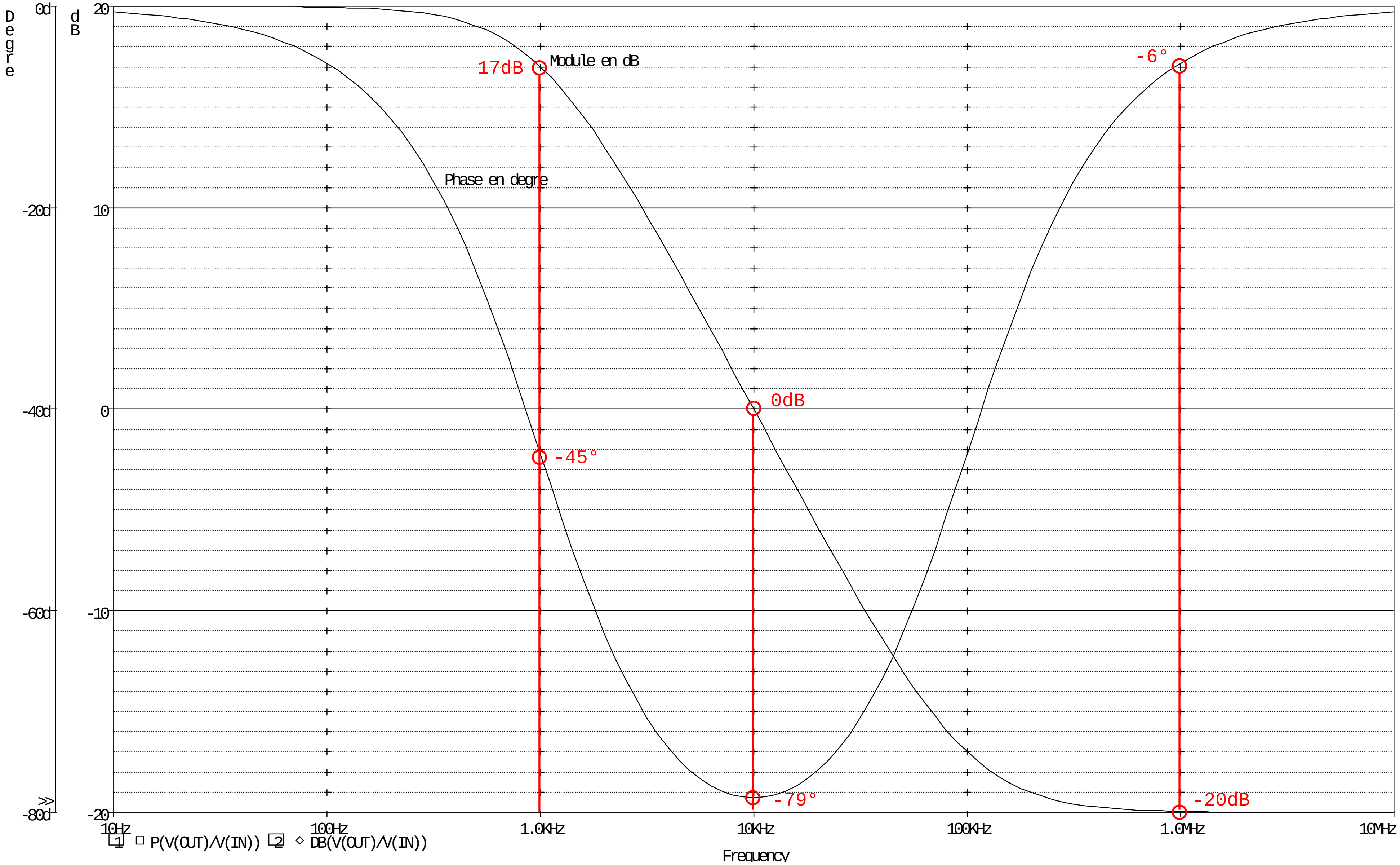


$$\Longrightarrow \quad 1+\frac{p}{\omega_5} \quad \text{avec} \quad \omega_5 = 2\pi f_5 \quad \text{et} \quad f_5 = 100\text{kHz}$$

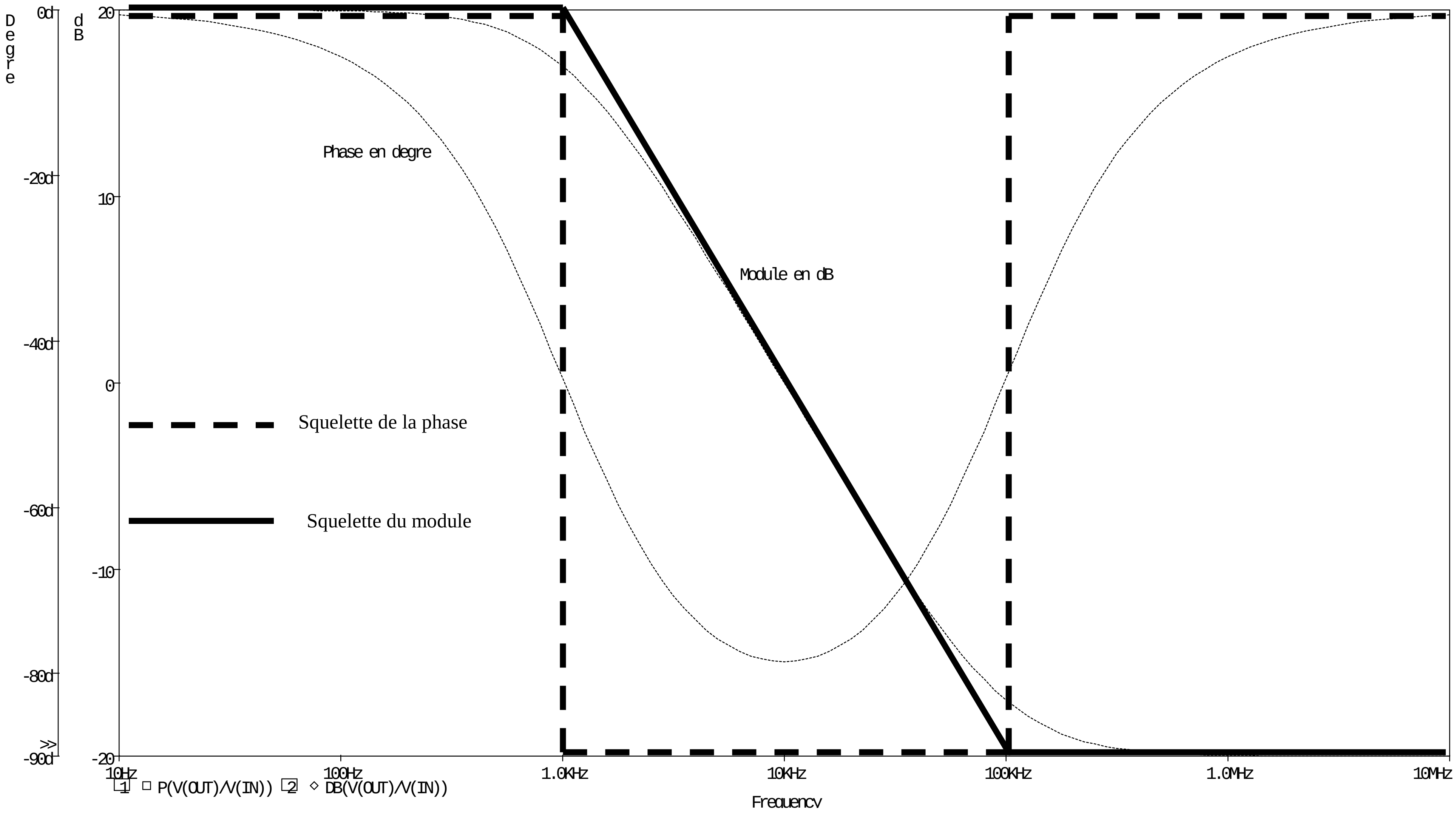


$$\Longrightarrow \quad 10^{\frac{20\text{dB}}{20}} = 10$$

$$\text{D'où} \quad \boxed{T(p) = 10\,\frac{1+\dfrac{p}{\omega_5}}{1+\dfrac{p}{\omega_4}}}$$



Degre
dB
0d
-20d
-40d
-60d
-80d
20
10
0
-10
-20
Module en dB
Phase en degre
17dB
-6°
0dB
-45°
-79°
-20dB
10Hz
100Hz
1.0KHz
10KHz
100KHz
1.0MHz
10MHz
1 P(V(OUT)/V(IN)) 2 DB(V(OUT)/V(IN))
Frequency


Degre
dB
0d
-20d
-40d
-60d
-80d
-90d
20
10
0
-10
-20
Phase en degre
Module en dB
Squelette de la phase
Squelette du module
10Hz
100Hz
1.0KHz
10KHz
100KHz
1.0MHz
10MHz
1 □ P(V(OUT)/V(IN)) 2 ◇ DB(V(OUT)/V(IN))
Frequency