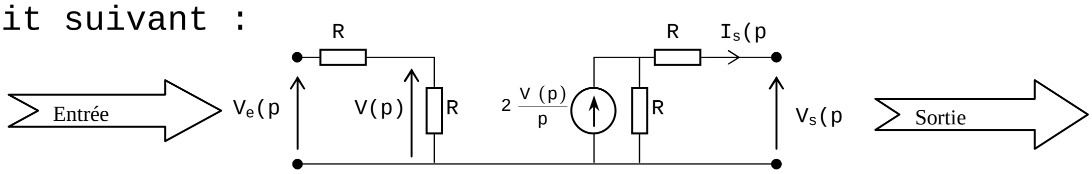
NOM :	**Correction** **Examen Médian EL80**	Note : /20

Durée : **1H40**. Calculatrice non autorisée car inutile. Aucun document personnel n'est autorisé. Téléphone portable et traducteur interdits

Pour chaque réponse, on expliquera la démarche qui conduit au résultat proposé. Les expressions mathématiques seront exprimées littéralement avant d'être éventuellement calculées de façon numérique.

EXERCICE 1 8

Considérons le système linéaire qui a pour schéma équivalent, le circuit suivant :



2 **1)** En justifiant vos réponses, déterminer :

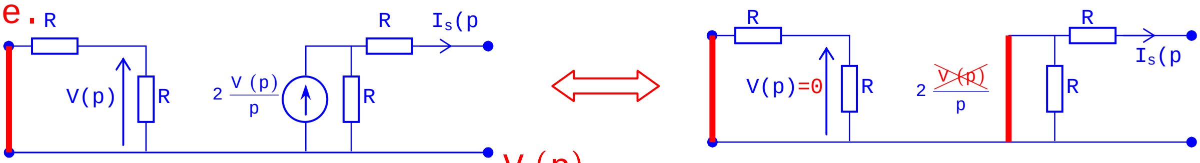
Son impédance d'entrée symbolique $Z_e(p)$:

Une source de tension branchée sur l'entrée verra R+R.

$$\boxed{Z_e(p) = 2R}$$

Son impédance de sortie symbolique $Z_s(p)$:

On applique une tension nulle à l'entré et on détermine l'impédance de Thévenin équivalente du montage observé depuis la sortie.



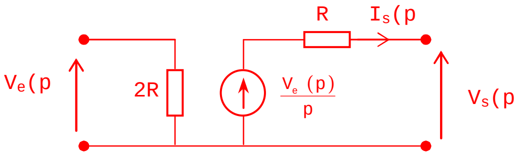
Si $V_e(p)=0$, alors $V(p)=0$ et $2\frac{V(p)}{p}=0$. La sortie est alors équivalente à une simple résistance R. $\boxed{Z_s(p) = R}$

Sa fonction de transfert à vide $I_s(p)=0$:

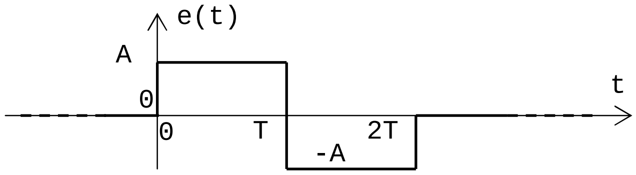
A vide $V_s(p) = 2\frac{V(p)}{p}$. Or $V(p) = V_e(p)\frac{R}{R+R} = \frac{V_e(p)}{2}$

D'où $\boxed{V_s(p) = \frac{V_e(p)}{p}}$. Ce montage est un intégrateur.

En déduire un schéma équivalent plus simple :



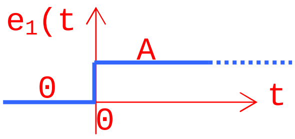
Considérons la source de tension parfaite e(t) ayant pour graphe :



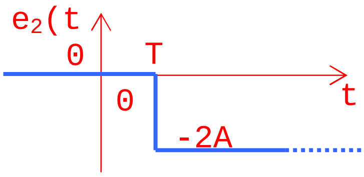
e(t) est reliée à l'entrée du système défini précédemment.

1,5 **2)** En utilisant les propriétés de la Transformée de Laplace (sans passer par le calcul direct), déterminer E(p) la transformée de e(t) (faire apparaître la somme de plusieurs termes)

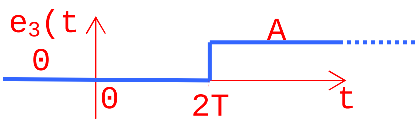
On décompose e(t) en une somme de 3 fonctions :



$$\Rightarrow E_1(p) = \frac{A}{p}$$ Transformée d'un échelon d'amplitude A.



$$\Rightarrow E_2(p) = \frac{-2A}{p} e^{-Tp}$$ Transformée d'un échelon d'amplitude -2A décalée de "T".



$$\Rightarrow E_3(p) = \frac{A}{p} e^{-2Tp}$$ Transformée d'un échelon d'amplitude A décalé de "2T".

D'où $$\boxed{E(p) = \frac{A}{p} - \frac{2A}{p} e^{-Tp} + \frac{A}{p} e^{-2Tp} = \frac{A}{p}\left(1 - 2e^{-Tp} + e^{-2Tp}\right)}$$

3) Déterminer $V_S(p)$ la transformée de Laplace du signal de sortie $V_S(t)$ du système à vide (i_S=0).

A vide, on sait que $V_s(p) = \dfrac{V_e(p)}{p}$ d'où

1 $$\boxed{V_s(p) = \frac{A}{p^2}\left(1 - 2e^{-Tp} + e^{-2Tp}\right)}$$

1,5 Déterminer les limites en 0^+ et en $+\infty$ de $v_s(t)$ ainsi que la pente de la tangente en 0^+ de $v_s(t)$.

$$\lim_{t\to 0^+} v_s(t) = \lim_{p\to+\infty} pV_s(p) = \lim_{p\to+\infty}\left(\frac{\cancel{p}A}{p^{\cancel{2}}}\left(1-2e^{-Tp}+e^{-2Tp}\right)\right) = 0$$

$$\lim_{t\to +\infty} v_s(t) = \lim_{p\to 0^+} pV_s(p) = \lim_{p\to 0^+}\left(\frac{\cancel{p}A}{p^{\cancel{2}}}\left(1-2e^{-Tp}+e^{-2Tp}\right)\right)$$

Or $1-2e^{-Tp}+e^{-2Tp} \underset{0}{\approx} 1-2\left(1-Tp+\frac{T^2p^2}{2}\right)+\left(1-2Tp+\frac{4T^2p^2}{2}\right) = T^2p^2$ d'où

$$\lim_{t\to +\infty} v_s(t) = \lim_{p\to 0^+} pV_s(p) = \lim_{p\to 0^+}\left(\frac{A}{\cancel{p}}\left(T^2p^{\cancel{2}}\right)\right) = 0$$

$$\lim_{t\to 0^+} v_s'(t) = \lim_{p\to+\infty} p\left[pV_s(p) - v_s\left(0^+\right)\right] = \lim_{p\to+\infty}\left(\frac{\cancel{p^2}A}{\cancel{p^2}}\left(1-2e^{-Tp}+e^{-2Tp}\right)\right) = A$$

4) Déterminer l'expression de $V_s(t)$

1 $V_s(p)$ peut se décomposer en trois termes :

$\frac{A}{p^2}$ est la transformée d'une rampe causale de pente A.

$\frac{-2A}{p^2}e^{-Tp}$ est la transformée d'une rampe causale de pente -2A retardée d'un temps T.

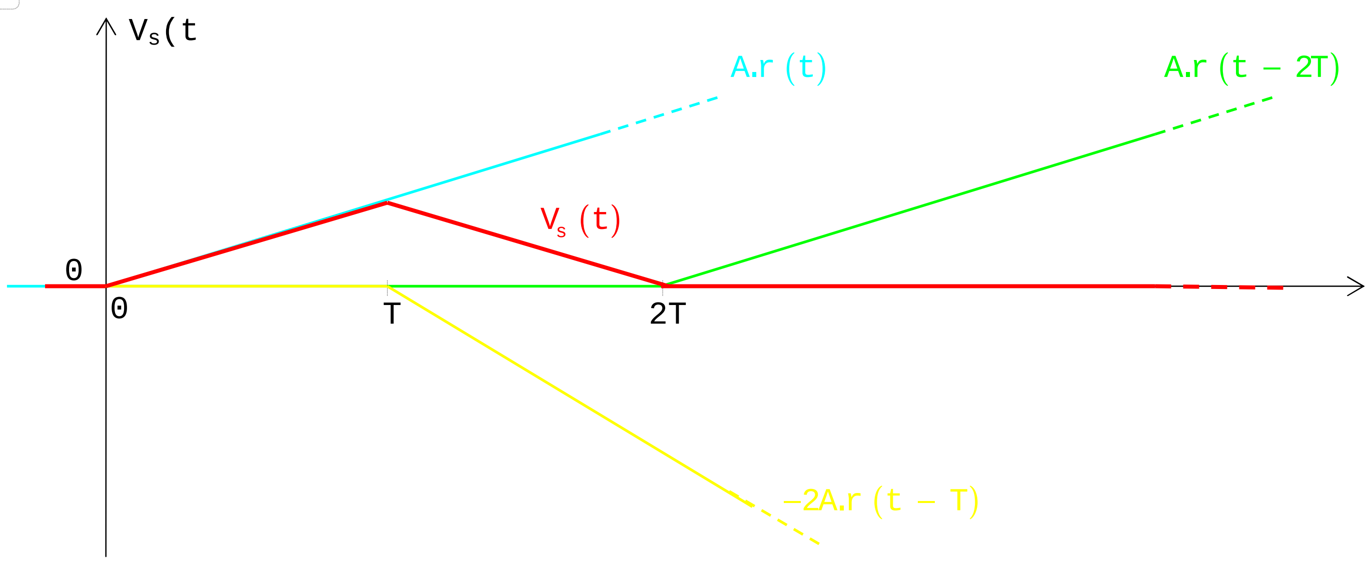
$\frac{A}{p^2}e^{-2Tp}$ est la transformée d'une rampe causale de pente A retardée d'un temps 2T.

En conclusion si r(t) est la rampe causale de pente unité alors,

$v_s(t) = Ar(t) - 2Ar(t-T) + Ar(t-2T)$

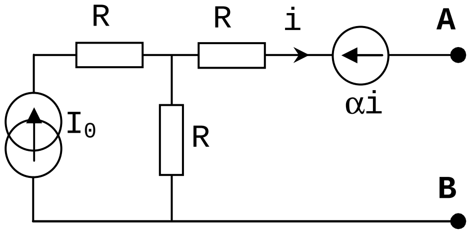
$$\boxed{v_s(t) = A\left[r(t) - 2r(t-T) + r(t-2T)\right]}$$

1 Représenter graphiquement $V_s(t)$

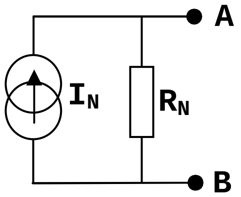


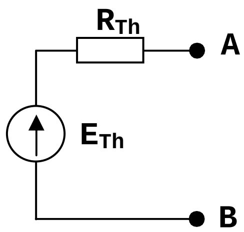
EXERCICE 2 3

Considérons le montage suivant:



3 **1)** Déterminer les dipôles AB équivalent de Thévenin et de Norton en fonction de I_0, R et α. On respectera les orientations et les notations suivantes :

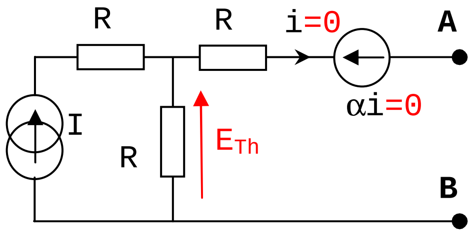




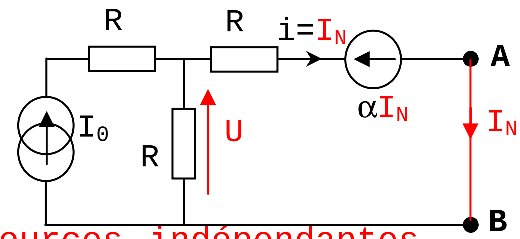
Le cours nous dit que $\begin{cases} R_{Th} = R_N \\ E_{Th} = R_{Th}.I_N \end{cases}$. Il suffit donc de trouver 2 des 3 inconnues pour connaitre la troisième.

a. E_{Th} est la tension à vide du dipôle c'est-à-dire V_{AB} quand i=0.

Si i=0, αi=0 donc E_{Th} est alors la tension aux bornes de la résistance du bas qui est parcourue par le courant I_0. D'où $\boxed{E_{Th} = RI_0}$.

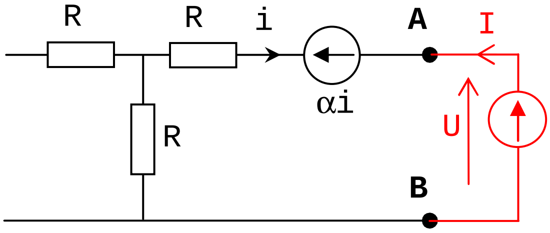


b. I_N est le courant de court circuit du dipôle AB. $U = R\left(I_0 - I_N\right) = RI_N + \alpha I_N$ d'où on déduit $\boxed{I_N = \dfrac{RI_0}{(2R + \alpha)}}$.



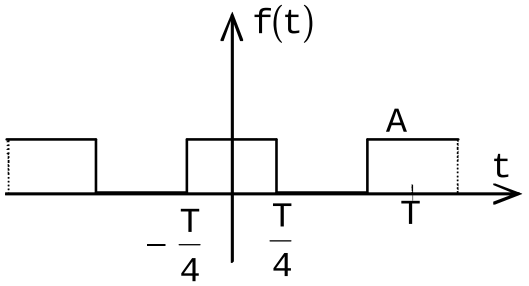
c. Pour obtenir R_{Th}, on éteint les sources indépendantes et on « mesure » la résistance entre les bornes A et B.

$R_{Th} = \dfrac{U}{I}$ or i=-I d'où l'équation de la maille $U - \alpha I - 2RI = 0$ d'où on déduit $\boxed{R_{Th} = 2R + \alpha}$.



EXERCICE 3 5

Considérons le signal périodique f(t) suivant :



Sa décomposition en série de Fourier nous montre une décroissance en 1/n de l'amplitude de ses harmoniques.

$$f(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi}\cos\left(2\pi\frac{1}{T}t\right) - \frac{A}{3\pi}\cos\left(2\pi\frac{3}{T}t\right) + \frac{A}{5\pi}\cos\left(2\pi\frac{5}{T}t\right) - \ldots etc$$

On notera que f(t) ne contient que des harmoniques de rang impair.

Le signal f(t) est appliqué à l'entrée d'un filtre passe-bande linéaire et invariant dans le temps dont les diagrammes de Bode sont fournis en annexe pages 8 et 9.

1) En utilisant la décomposition en série de Fourier donnée ci-dessus (jusqu'au terme de rang 5), déterminez la série de Fourier de la tension de sortie s(t) du filtre en régime permanent (jusqu'au terme de rang 5). On expliquera la méthode.

4 Comme le filtre est linéaire et invariant dans le temps, la décomposition de s(t) en régime permanent sera la somme des réponses du filtre à chacun des termes de f(t).
En lisant sur les diagrammes de Bode, on obtient:

- le terme $\frac{A}{2}$ ne sera pas transmis.
- le terme $\frac{A}{\pi}\cos\left(2\pi\frac{1}{T}t\right)$ de fréquence 1kHz subira une atténuation d'environ 102dB soit un facteur d'amplification de $10^{-\frac{102}{20}} = 10^{-5,1}$ et un déphasage d'environ -90°.
- le terme $-\frac{A}{3\pi}\cos\left(2\pi\frac{3}{T}t\right)$ de fréquence 3kHz subira une atténuation d'environ 0dB soit un facteur d'amplification de 1 et un déphasage d'environ -360°.
- le terme $\frac{A}{5\pi}\cos\left(2\pi\frac{5}{T}t\right)$ de fréquence 5kHz subira une atténuation d'environ 78dB soit un facteur d'amplification de $10^{-\frac{78}{20}} = 10^{-3,9}$ et un déphasage d'environ -630° (soit +90°).

d'où

$$\boxed{s(t) = \frac{A}{2}.0 + \frac{A}{\pi}.10^{-5,1}.\cos\left(2\pi\frac{1}{T}t - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{A}{3\pi}.1.\cos\left(2\pi\frac{3}{T}t - 2\pi\right) + \frac{A}{5\pi}.10^{-3,9}.\cos\left(2\pi\frac{5}{T}t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

On notera les atténuations très importantes de l'harmonique 5 et du fondamental. En conséquence, $s(t) \approx -\frac{A}{3\pi}.\cos\left(2\pi\frac{3}{T}t\right)$

Que deviennent, à votre avis, les termes de rang supérieur à 5 ? (justifiez)

0,5 Leur atténuation sera très importante. Ces termes seront négligeables.

Quelle aura l'allure du signal s(t) à la sortie du filtre en régime permanent ? (justifiez)

0,5 s(t) sera une sinusoïde de fréquence 3kHz. Le filtre aura extrait l'harmonique 3 du signal carré. $s(t) \approx -\frac{A}{3\pi}.\cos\left(2\pi\frac{3}{T}t\right)$

EXERCICE 4 4

Considérons un système ayant pour fonction de transfert opérationnelle T(p) :

$$T(p) = \frac{\frac{p}{\omega_0}\left(1 + \frac{p}{\omega_2}\right)}{\left(1 + \frac{p}{\omega_1}\right)^2\left(1 + \frac{p}{\omega_3}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega_0 = 500\,rd/s \\ \omega_1 = 1000\,rd/s \\ \omega_2 = 2000\,rd/s \\ \omega_3 = 8000\,rd/s \end{cases}$$

4 **1)** Tracer les squelettes de Bode de la fonction de transfert harmonique associée à T(p). Définir clairement les axes ainsi que leurs échelles. Faire apparaître les points remarquables. Expliquer vos constructions.

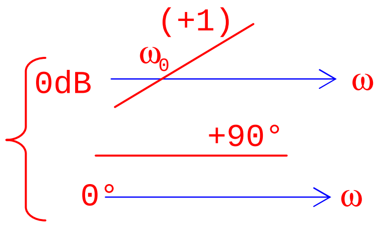
Posons :

$$\begin{cases} T_0(p) = \frac{p}{\omega_0} \\ T_2(p) = 1 + \frac{p}{\omega_2} \\ T_1(p) = \frac{1}{\left(1 + \frac{p}{\omega_1}\right)^2} \\ T_3(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_3}} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega_0 = 500\,rd/s \\ \omega_1 = 1000\,rd/s \\ \omega_2 = 2000\,rd/s \\ \omega_3 = 8000\,rd/s \end{cases}$$

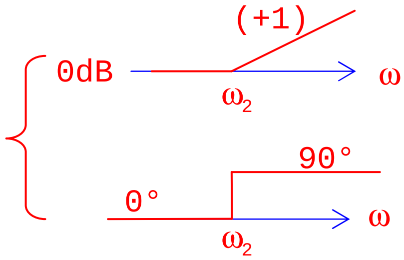
Alors $T(p) = T_0(p)\,T_1(p)\,T_2(p)\,T_3(p)$.

Pour obtenir les squelettes de Bode de la fonction de transfert harmonique $\underline{T}(j\omega)$ associée à $T(p)$, il suffit de tracer les squelettes de Bode de chacune des fonctions de transfert harmoniques ($\underline{T}_0(j\omega)$, $\underline{T}_1(j\omega)$, $\underline{T}_2(j\omega)$ et $\underline{T}_3(j\omega)$) associées à $T_0(p)$, $T_1(p)$, $T_2(p)$ et $T_3(p)$ et de les sommer graphiquement.

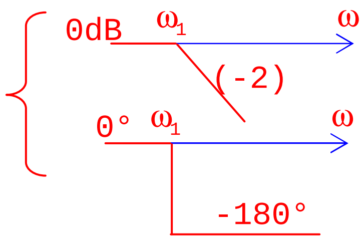
$$\underline{T}_0(j\omega) = j\frac{\omega}{\omega_0} \quad \Longrightarrow$$



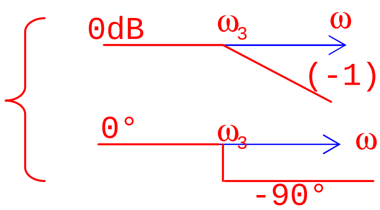
$$\underline{T}_2(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_2} \quad \Longrightarrow$$

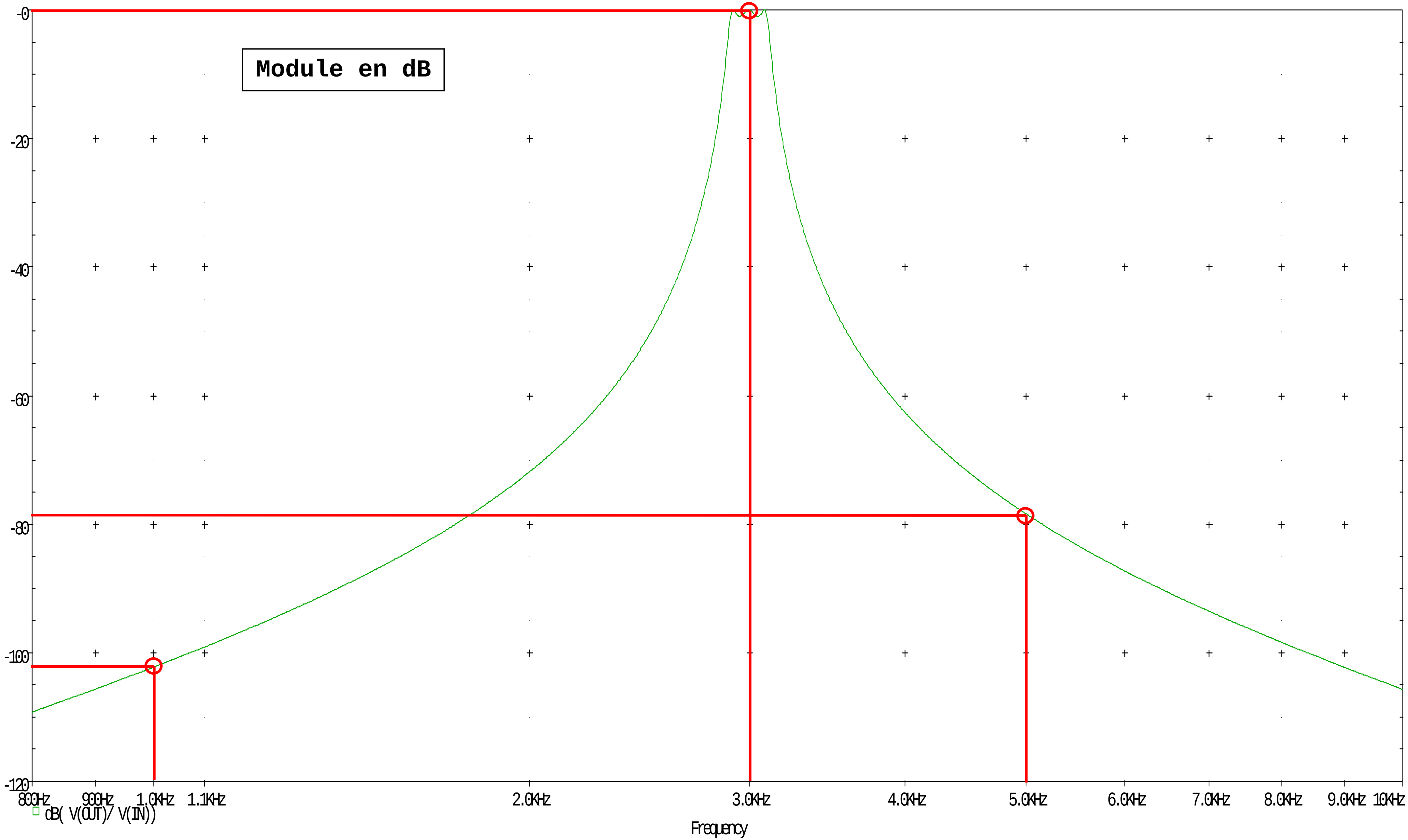


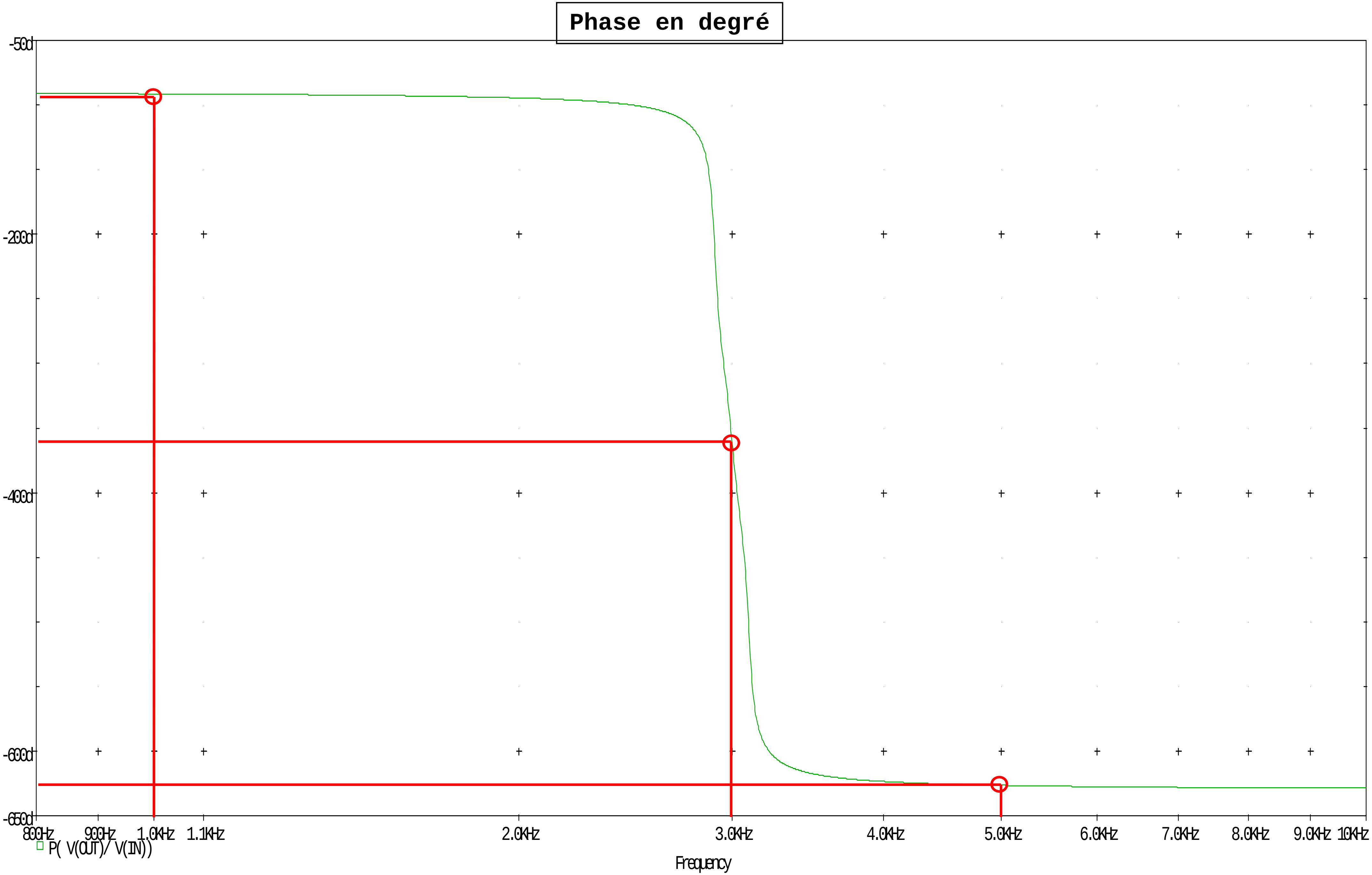
$$\underline{T}_1(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \quad \Longrightarrow$$

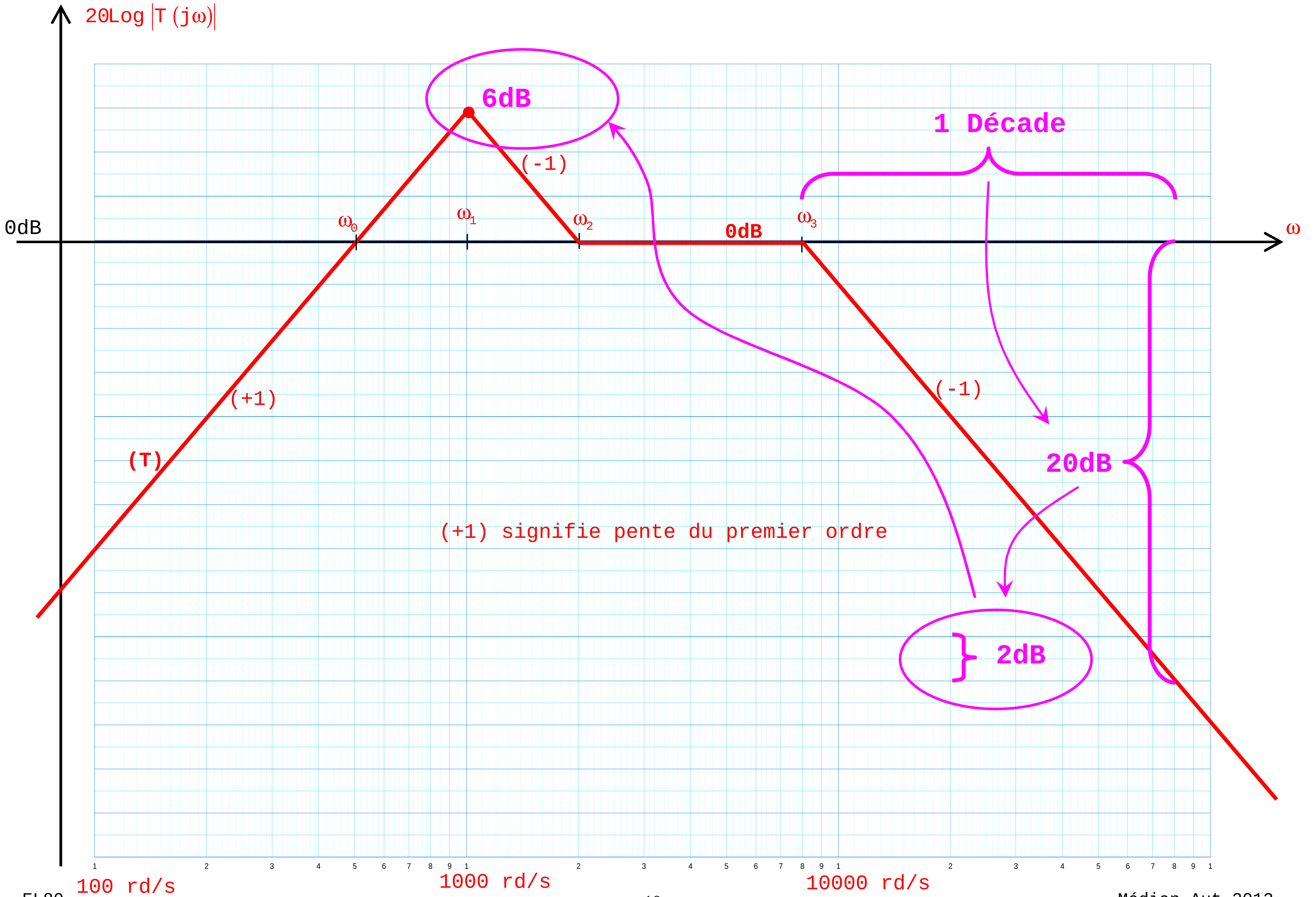


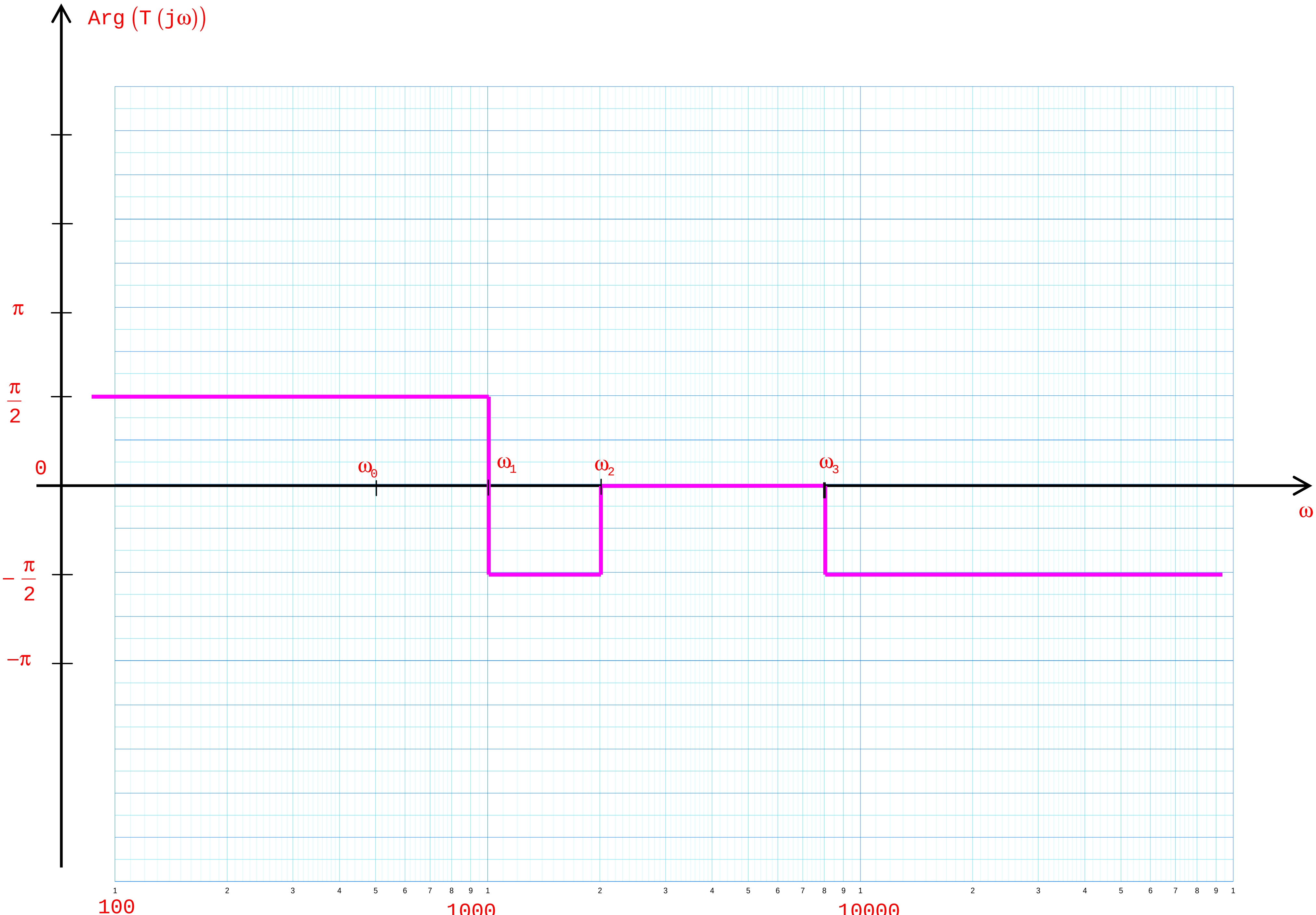
$$\underline{T}_3(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_3}} \quad \Longrightarrow$$




Module en dB
-0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
800Hz
900Hz
1.0KHz
1.1KHz
2.0KHz
3.0KHz
4.0KHz
5.0KHz
6.0KHz
7.0KHz
8.0KHz
9.0KHz
10KHz
dB(V(OUT)/ V(IN))
Frequency


Phase en degré
-50d
-200d
-400d
-600d
-650d
800Hz
900Hz
1.0KHz
1.1KHz
2.0KHz
3.0KHz
4.0KHz
5.0KHz
6.0KHz
7.0KHz
8.0KHz
9.0KHz
10KHz
P(V(OUT)/ V(IN))
Frequency


20Log |T (jω)|
6dB
1 Décade
(-1)
0dB
ω0
ω1
ω2
ω3
0dB
ω
(+1)
(-1)
(T)
20dB
(+1) signifie pente du premier ordre
2dB
100 rd/s
1000 rd/s
10000 rd/s


Arg (T (jω))
π
π/2
0
−π/2
−π
ω0
ω1
ω2
ω3
ω
100
1000
10000