

final IM42 P2011

Outils avancés en ingénierie mécanique

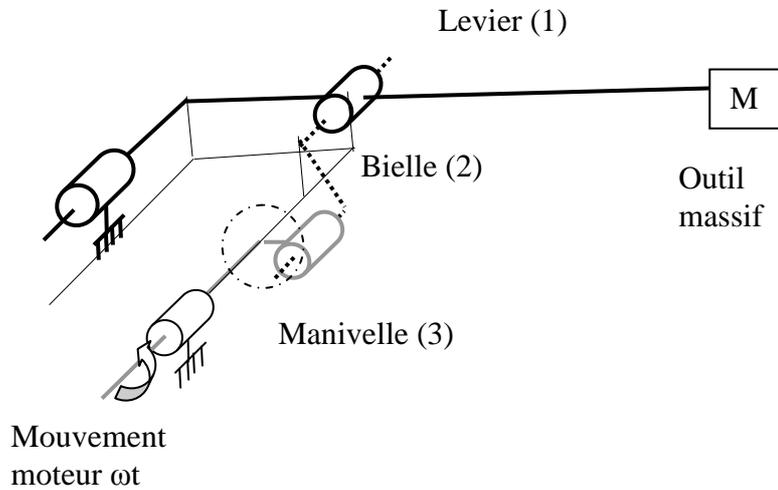
Lundi 27juini de 10h30 à 12h30

- documents autorisés
- calculatrice autorisée
- partie simulation 5 points, réponse sur le sujet
- partie mécanique 15 points , réponses sur copie d'examen

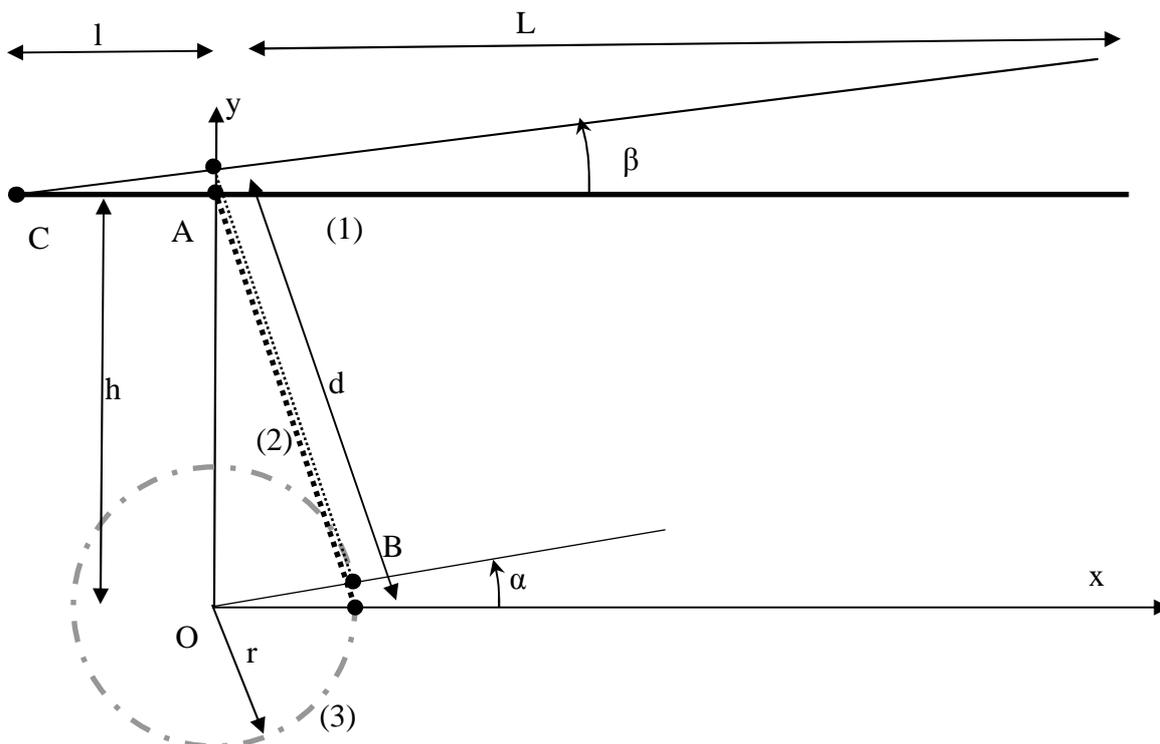
UV IM42

final printemps 2011

Pour réaliser le positionnement d'un outils (broche tournante,agrafeuse , tête de lecture ...) nous imaginons un mécanisme actionné par un moteur (rotatif) entrainant un levier(1) par l'intermédiaire d'un système bielle (2)manivelle (3), suivant le schéma ci-dessous.



Vu en plan nous pouvons paramétrer le mouvement



en fonction de ce paramétrage nous pouvons exprimer les positions successives de A,B et exprimer que la distance AB est constante (longueur de la bielle). Cela nous donne une relation entre les angles α et β solution de l'équation

$$0 = lr(\cos \alpha - \cos(\alpha + \beta)) + l^2(1 - \cos \beta) - hr \sin \alpha + hl \sin \beta$$

UV IM42
final printemps 2011

Qui peut se simplifier si l'on considère une configuration où β reste petit (pour cela r doit être petit devant l) la relation devient $\beta = \frac{r}{l} \sin \alpha$

Compte tenu de la faiblesse de l'angle β , on considérera que le point A se déplace linéairement suivant l'axe y . Avec la définition précédente et en considérant la vitesse de rotation du moteur constante.

position $y = h + l \sin\left(\frac{r}{l} \sin \omega t\right)$

vitesse $\dot{y} = r \omega \cos \omega t$

accélération $\ddot{y} = -r \omega^2 \sin \omega t$

Nous pourrions alors déduire la vitesse de rotation du levier (1) et l'accélération verticale de la masse

rotation de (1) $\omega_{1(t)} = \frac{r}{l} \cos \omega t$

vitesse de la masse $\dot{y} = (L + l) \frac{r}{l} \cos \omega t$

accélération de la masse $\ddot{y} = -(L + l) \frac{r}{l} \omega^2 \sin \omega t$

La masse engendre donc une force variable sur le levier (1)

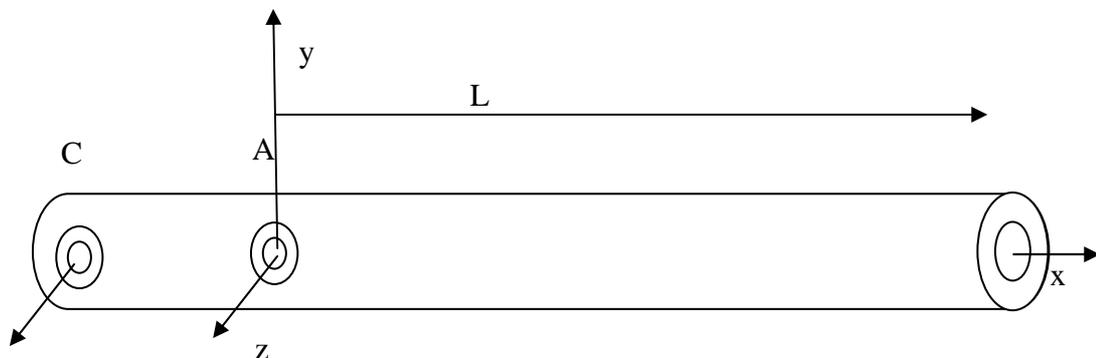
force engendrée $F(t) = -(L + l) M \frac{r}{l} \omega^2 \sin \omega t$

Le levier (1) est un tube cylindre en acier dont nous estimons le champ de déplacement de la matière par les fonctions suivantes

déplacement suivant x $U = + \frac{F}{EI} z \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right)$

déplacement suivant y $V = - \frac{F}{EI} \left(L \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$

déplacement suivant z $W = 0$



UV IM42

final printemps 2011

Question 1

Calculer le tenseur des déformations de la matière du levier (1)

Question 2

Déduire le tenseur des contraintes

Question 3

Définir les conditions aux limites sur la face extérieure du tube,

Question 4

Montrer quelle ne sont pas respectées,

Quel est l'élément de comportement des matériaux qui a certainement été négligé

Question 5

Calculez En quel point apparaîtra la déformation ou la rupture

On prendra $\overline{\mathbf{T}} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{F}{I} z(l-x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}$

UV IM42
final printemps 2011

Ce tube en acier est faiblement amortissant, nous considérerons sa masse faible devant la masse fixée à l'extrémité. Le système peut être assimilé à un système masse ressort à 1 degré

de liberté. la fréquence propre du système sera

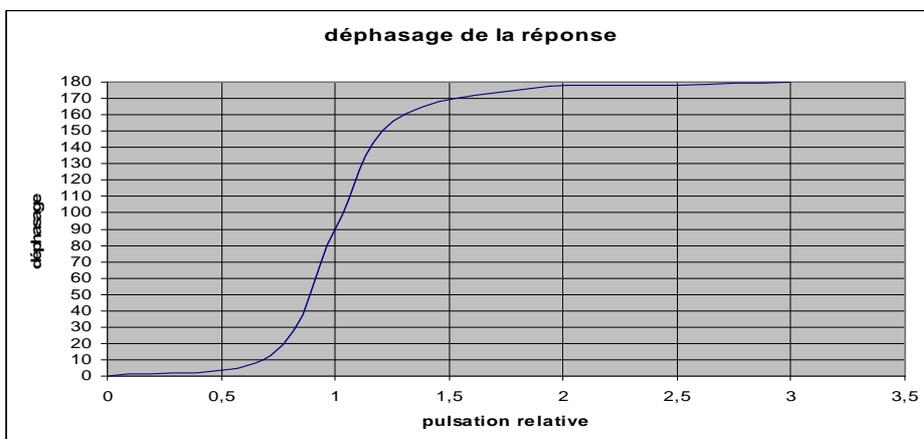
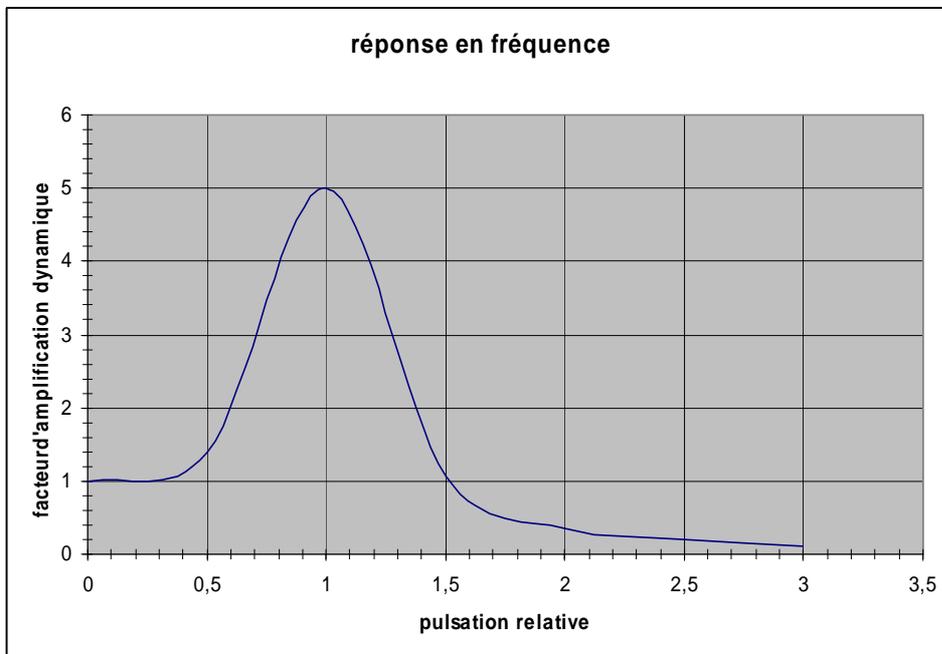
$$\text{fréquence propre } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

$$\text{avec } k = \frac{3EI}{L^3} \text{ et } I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$$

Un calcul donne les solutions graphiques suivantes pour notre configuration.

$$\text{pulsation relative} = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\text{facteur d'amplification} = \frac{\text{déplacement pour une force statique } F}{\text{déplacement pour une force } F \cos \omega t}$$



Question 6

Application numérique

Paramètre	r mm	H mm	l mm	L mm
valeur	20	200	100	400
Paramètre	M kg	E Pa	D mm	d mm
valeur	5	210^9	40	30

Calculer :

- L'amplitude du déplacement pour le système rigide
- La fréquence propre
- L'amplitude du déplacement de flexion créée par la force d'inertie(en fonction de ω)

Question 7

Tracer (à l'échelle à main levée) :

- Le déplacement de la masse pour un système rigide
- Le déplacement de flexion pour $\omega \ll \omega_0$
- Le déplacement de flexion pour $\omega = \omega_0$
- Le déplacement de flexion pour $\omega \gg \omega_0$
- Le déplacement total (système rigide + flexion)

Question 8

Sur la base des graphiques précédant .Faites des recommandations de conception et d'utilisation du système.

Formules utiles

Tenseur des déformations

cartésien

$$\bar{D} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{matrix} \varepsilon_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = 1/2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) \\ \varepsilon_{22} = \frac{\partial U_2}{\partial x_2} & \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = 1/2 \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \right) \\ \varepsilon_{33} = \frac{\partial U_3}{\partial x_3} & \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} = 1/2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right) \end{matrix}$$

cylindrique

$$\bar{D} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{rz} & \varepsilon_{\theta z} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{matrix} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial U_r}{\partial r} & \varepsilon_{r\theta} = 1/2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta}{r} + \frac{\partial U_\theta}{\partial r} \right) \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r} & \varepsilon_{rz} = 1/2 \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z} & \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} = 1/2 \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} \right) \end{matrix}$$

Equation d'équilibre

<p><i>cartésien</i></p> $F_i^* - \rho\gamma_i + \tau_{ij,j} = 0$ <p><i>i et j variant de 1 à 3</i></p> $\tau_{ij,j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$	<p><i>cylindrique</i></p> $\begin{cases} \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} + F_r^* - \rho\gamma_r = 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta^* - \rho\gamma_\theta = 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + F_z^* - \rho\gamma_z = 0 \end{cases}$
---	--

Loi de comportement élastique linéaire loi de Hook

$$\bar{T} = \lambda \bar{\theta} \bar{I} + 2\mu \bar{D} \text{ avec } \theta \text{ premier invariant de } \bar{D}$$

ou

$$\bar{D} = \frac{1 + \sigma}{E} \bar{T} - \frac{\sigma}{E} \bar{\theta} \bar{I} \text{ avec } \Theta \text{ premier invariant de } \bar{T}$$

\bar{I} tenseur unitaire

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \sigma = \nu, E \text{ coefficient matériaux}$$

UV IM42
final printemps 2011

Invariant d'un tenseur

forme générale du tenseur \bar{t}	en valeur principales \bar{t} noté t_1, t_2, t_3
$I_1 = t_{11} + t_{22} + t_{33} = \text{trace}(\bar{t})$	$I_1 = t_1 + t_2 + t_3 = \text{trace}(\bar{t})$
$I_2 = t_{11} \cdot t_{22} - t_{12} \cdot t_{21} + t_{22} \cdot t_{33} - t_{23} \cdot t_{32} + t_{33} \cdot t_{11} - t_{31} \cdot t_{13}$	$I_2 = t_1 \cdot t_2 + t_2 \cdot t_3 + t_3 \cdot t_1$
$I_3 = \det \bar{t}$	$I_3 = t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 = \det \bar{t}$

Vecteur contrainte

$$\vec{T} = \bar{T} \cdot \vec{v}$$

Déviateur d'un tenseur

<p>déviateur du tenseur $\bar{t} \Rightarrow \bar{t}^d$</p> <p>$\bar{t}^d = \bar{t} - \frac{1}{3}(\text{trac} \bar{t})\bar{I}$</p> <p>$I_1^d = \text{trace}(\bar{t}^d) = 0$</p> <p>$I_2^d = \frac{1}{6}[(t_{11} - t_{22})^2 + (t_{22} - t_{33})^2 + (t_{33} - t_{11})^2 + 6(t_{12}^2 + t_{23}^2 + t_{31}^2)]$</p> <p>$I_3^d = \det \bar{t}^d$</p>

Contrainte équivalente de Von Misés (équivalente à la contrainte de l'essai de traction)

<p>contrainte équivalente $\bar{\tau}_{(\bar{\tau})} = \sqrt{3\Sigma_2^d}$</p> <p>$\Sigma_2^d$ 2ème invariant du déviateur des contraintes</p>
