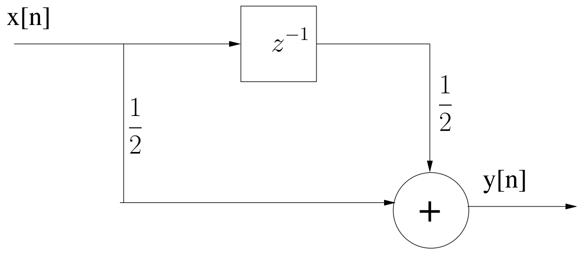
# FINAL IN41 P10

Durée : 2 heures / tous les documents sont autorisés / Calculette simple conseillée
Les exercices suivants sont notés 19 points sur 20
+ 1 point pour la lisibilité de la présentation, la rigueur de la syntaxe et de l'orthographe

## Exercise 1

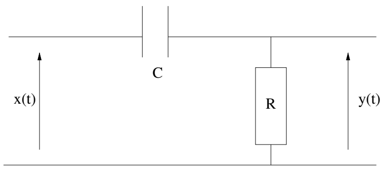
Considérant le schéma fonctionnel du filtre numérique suivant:




1. Exprimer la relation de récurrence donnant $y[n]$.
2. Donner la fonction de transfert $H(z)$ du filtre.
3. Déterminer et tracer la réponse impulsionnelle $h(n)$. De quel type de filtre s'agit-il (FIR ou IIR)?. Justifier votre réponse.
4. Calculer la transformée en z de $\delta(n-k)$ avec $k \neq n$ et $\delta(n)$ l'impulsion de Dirac numérique. Retrouver ainsi l'expression de $h(n)$ à partir de $H(z)$.
5. Déterminer la réponse indiciele $d(n)$ à partir de l'équation aux différences.
6. Retrouver cette réponse indicielle $d(n)$ à partir de la fonction de transfert $H(z)$.
7. Donner l'expression de la réponse fréquentielle $H(jf)$ en fonction de $f$, $\pi$ et de la fréquence d'échantillonnage $f_e$. En déduire l'expression de $\| H(jf) \|$ et $\Phi_H = arg(H(jf))$
8. Calculer la valeur de $\| H(jf) \|$ et $\Phi_H = arg(H(jf))$ pour: $f = 0$, $f = \frac{f_e}{4}$ et $f = \frac{f_e}{2}$
9. Tracer $\| H(jf) \|$ et $\Phi_H = arg(H(jf))$ sur $[-\frac{f_e}{2},+\frac{f_e}{2}]$
10. La fréquence de coupure $f_c$ est généralement choisie de sorte que $\| H(jf_c) \| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donner l'expression de $f_c$ en fonction de $f_e$.

# Exercise 2

On considère un filtre du premier ordre qui peut être réalisé à partir du montage électronique représenté sur la figure suivante ($x(t)$ étant le signal d'entrée du filtre et $y(t)$ le signal de sortie):




1. **Etude du filtre analogique :**
   (a) Etablir l'équation différentielle liant $y(t)$, $\dfrac{dy(t)}{dt}$ et $\dfrac{dx(t)}{dt}$
   (b) Exprimer la fonction de transfert $H(p)$ en fonction de $p$, $R$ et $C$.
   (c) Exprimer la réponse fréquentielle $H(j.f)$ en fonction de $R$, $C$ et $f$
   (d) Calculer $\lim_{f\to 0} H(j.f)$ et $\lim_{f\to +\infty} H(j.f)$. En déduire la nature du filtre (passe-bas, passe-haut,...).
   (e) Montrer que l'expression de la réponse impulsionnelle du filtre est donnée par:
   $$h(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC}.e^{-\frac{t}{RC}}.\Gamma(t)$$
   ( $\delta(t)$ étant l'impulsion de Dirac et $\Gamma(t)$ l'échelon unitaire)
   (f) Montrer que l'expression de la réponse indicielle du filtre est donnée par :
   $$d(t) = e^{-\frac{t}{RC}}.\Gamma(t)$$

2. **Synthèse du filtre numérique équivalent :**
   (a) Calculer la fonction de transfert $H_1(z)$ du filtre numérique obtenu par la méthode de *l'invariance impulsionnelle.*
   (b) Donner l'équation aux différences du filtre obtenu sous la forme : $y[n] = b_0.x[n] + b_1.x[n-1] + a_1.y[n-1]$. $b_0$, $b_1$ et $a_1$ sont à determiner
   (c) Calculer la fonction de transfert $H_2(z)$ du filtre numérique obtenu par la méthode de *l'invariance indicielle.*
   (d) Donner l'équation aux différences du filtre obtenu sous la forme : $y[n] = b_0.x[n] + b_1.x[n-1] + a_1.y[n-1]$. $b_0$, $b_1$ et $a_1$ sont à determiner
   (e) Calculer la fonction de transfert $H_3(z)$ du filtre numérique obtenu par *la méthode d'Euler*
   (f) Donner l'équation aux différences du filtre obtenu sous la forme : $y[n] = b_0.x[n] + b_1.x[n-1] + a_1.y[n-1]$. $b_0$, $b_1$ et $a_1$ sont à determiner
   (g) Calculer la fonction de transfert $H_4(z)$ du filtre numérique obtenu par la méthode de *la transformation bilinéaire.*
   (h) Donner l'équation aux différences du filtre obtenu sous la forme : $y[n] = b_0.x[n] + b_1.x[n-1] + a_1.y[n-1]$. $b_0$, $b_1$ et $a_1$ sont à determiner