FINAL IN41 P11

Durée : 2 heures / tous les documents sont autorisés / Calculette simple conseillée
Les exercices suivants sont notés 19 points sur 20
+ 1 point pour la lisibilité de la présentation, la rigueur de la syntaxe et de l'orthographe

Exercise 1

1. **Réponse impulsionnelle et indicielle de filtres analogiques**: Donner les réponses impulsionnelles $h_i(t)$ et indicielles $d_i(t)$ des systèmes suivants:

$$H_1(p) = \frac{1}{1+2p} \quad H_2(p) = \frac{1}{p^2+3p+2} \quad H_3(p) = \frac{p+1}{p^2+4} \quad H_4(p) = \frac{p^3+3p^2+4p+3}{p^2+2p+1}$$

2. **Synthèse d'un filtre Butterworth**: On souhaite réaliser un filtre passe-bas de gain unité ne comportant pas d'oscillations dans la bande passante et satisfaisant au gabarit suivant:

$$G_p = -0,04\ [dB] \quad ; \quad f_p = 3\ [kHz]$$

$$G_a = -40\ [dB] \quad ; \quad f_a = 10\ [kHz]$$

   (a) Trouver l'ordre n du filtre;
   (b) Donner les fréquences de coupures $f_{c,p}$ et $f_{c,a}$ (en kHz) calculées avec les pulsations ω_p et ω_a ainsi que la fréquence de coupure f_c (en kHz) à choisir pour éviter que la courbe de réponse fréquentielle touche le gabarit.
   (c) Donner la fonction de transfert du filtre $H(p)$ en fonction de p, π et f_c.

n	**Polynôme de Butterworth $P_n(p)$ pour $\omega_c = 1$**
1	$(p+1)$
2	$p^2+1.4142p+1$
3	$(p+1)(p^2+p+1)$
4	$(p^2+0.7654p+1)(p^2+1.8478p+1)$
5	$(p+1)(p^2+0.6180p+1)(p^2+1.6180p+1)$
6	$(p^2+0.5176p+1)(p^2+1.4142p+1)(p^2+1.9319p+1)$

Exercise 2

1. **Réponse d'un système numérique** : On considère l'équation aux différences d'un intégrateur numérique (T_e étant la période d'échantillonnage et τ une constante) :

$$y[n] = y[n-1] + \frac{T_e}{2\tau}.(x[n]+x[n-1])$$

(a) Claculer les valeurs de la réponse impulsionnelle $h[n]$ et la représenter graphiquement avec $\frac{T_e}{\tau} = 0,2$

(b) Donner la fonction de transfert $H(z)$

(c) En partant de la fonction de transfert Montrer que la transformée en z $D(z)$ de la réponse indicielle $d[n]$ est donnée par :

$$D(z) = \frac{T_e}{2\tau}.\frac{z(z+1)}{(z-1)^2}$$

(d) En déduire que $d[n] = \frac{T_e}{2\tau}(1+2n)\Gamma[n]$

(e) Retrouver maintenant cette réponse indicielle en calculant ses échantillons à partir de l'équation aux différences.

(f) Montrer que la réponse fréquentielle est égale à $H(j\omega) = \frac{T_e}{2\tau}\frac{1}{j\tan(\frac{\omega T_e}{2})}$

(g) Calculer et représenter $||H(j\omega)||$ en fonction de $\frac{f}{f_e}$ pour $0 < \frac{f}{f_e} < 0,5$ avec $\frac{T_e}{\tau} = 0,2$

2. **Synthèse de filtres** : On souhaite effectuer la synthèse d'un filtre RIF d'ordre 7, en partant d'un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = \frac{f_e}{5}$.

(a) Donner la réponse impulsionnelle $h_a(t)$ du filtre idéal analogique

(b) Echantillonner cette réponse impulsionnelle et donner l'expression des coefficients $h[n]$

(c) La réponse impulsionnelle est infinie, on la tronque par une **fenêtre rectangulaire**. Calculer les coefficients du filtre et tracer cette réponse impulsionnelle.

(d) Exprimer la fonction de transfert $H(z)$ de ce filtre en fonction de z et des coefficients $h[n]$

(e) En déduire l'expression de la réponse fréquentielle $H(jf)$ du filtre

(f) Tracer cette réponse fréquentielle sur $[0, f_e]$. Quel effet sur cette réponse aura une augmentation de l'ordre du filtre.

(g) Que faut-t-il faire pour rendre le filtre réalisable? Donner alors les coefficients b_k finaux du filtre FIR obtenu.