FINAL IN41 P13

Durée : 2 heures / tous les documents sont autorisés / Calculette simple conseillée
Les exercices suivants sont notés 19 points sur 20
+ 1 point pour la lisibilité de la présentation, la rigueur de la syntaxe et de l'orthographe

Exercise 1

On considère une structure de filtre analogique (d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$) décrite par l'équation différentielle suivante. On suppose également que toutes les conditions initiales sont nulles.

$$k_1\ e'(t) + (1 - k_1)\ e(t) = s(t) + k_2\ s'(t)$$

k_1 et k_2 étant deux réels strictement positifs ou nuls.

1. **Cas 1**: $k_1 = 0$ et $k_2 > 0$
   (a) Donner la fonction de transfert $H_1(p)$ en fonction de k_2.
   (b) Quel lien existe entre la réponse impulsionnelle $h_1(t)$ du filtre et sa fonction de transfert $H_1(p)$. Donner l'expression de $h_1(t)$.
   (c) Calculer les limites $h_1(\infty)$ et $h_1(0)$ à partir de l'expression de $h_1(t)$ et tracer cette réponse.
   (d) Retrouver les limites calculées dans la question prècedente en utilisant les théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale.
   (e) Que dire de la stabilité du filtre? Vérifier ça de 2 manières
   (f) Exprimer la réponse fréquentielle $H_1(j.f)$ en fonction de k_2, de π et de la fréquence f.
   (g) Calculer $\lim_{f \to 0} H_1(j.f)$ et $\lim_{f \to +\infty} H_1(j.f)$. En déduire la nature du filtre (passe-bas, passe-haut,...).
2. **Cas 2** : $k_1 = k_2 = 1$
   (a) Donner la fonction de transfert $H_2(p)$.
   (b) Quelle est à votre avis la nature du filtre? Justifier votre réponse.
   (c) Donner l'expression du signal de sortie du filtre pour un signal d'entrée $x(t) = e^{+t}\Gamma(t)$

Exercise 2

On considère une structure de filtre numérique (d'entrée $x[n]$ et de sortie $y[n]$) décrite par l'équation au différences suivante:

$$b_0\ y[n] + b_1\ y[n-1] + b_2\ y[n-2] = a_0\ x[n] + a_1\ x[n-1] + a_2\ x[n-2]$$

$a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ sont des réels.

1. **Cas 1** : $b_0 = 1;\ b_1 = b_2 = 0$; et $a_1 = \dfrac{1}{2};\ a_0 = a_2 = \dfrac{1}{4}$

(a) S'agit-il d'un filtre récursif ou non récursif? Justifier votre réponse.

(b) Donner l'expression de la fonction de transfert $H_1(z)$ du filtre

(c) Quelle relation existe-t-il entre la réponse impulsionnelle $h_1[n]$ et la fonction de transfert $H_1(z)$?

(d) Donner la relation générale liant la sortie $y[n]$, l'entrée $x[n]$ et la réponse impulsionnelle $h_1[n]$.

(e) Donner la réponse impulsionnelle $h_1[n]$ en fonction de l'impulsion numérique $\delta[n]$.

(f) Retrouver cette réponse en calculant ses échantillons à partir de l'équation aux différences.

(g) Dessinez la réponse impulsionnelle.

(h) Montrer que la réponse fréquentielle est donnée par : $H_1(j\Omega) = \frac{1}{2}\, e^{-j\ \Omega}(1 + \cos(\Omega))$ ($\Omega = 2\pi \frac{f}{f_e}$: la pulsation normalisée)

(i) Esquissez $||H_1(j\Omega)||$ et $arg(H(j\Omega))$

(j) Quelle est la nature du filtre? Justifier l'appellation *filtre à phase linéaire.*

(k) Exprimer la fréquence de coupure f_c en fonction de la fréquence d'échantillonnage f_e.

2. **Cas 2** : $b_0 = 1;\ b_1 = 1,8;\ b_2 = 0,8;$ et $a_1 = 0,2;\ a_0 = a_2 = 0$

   (a) S'agit-il d'un filtre récursif ou non récursif? Justifier votre réponse.

   (b) Montrer que la fonction de transfert est donnée par : $H_2(z) = \dfrac{0,2z}{(z-1)(z-0,8)}$

   (c) En déduire la réponse impulsionnelle $h_2[n]$.