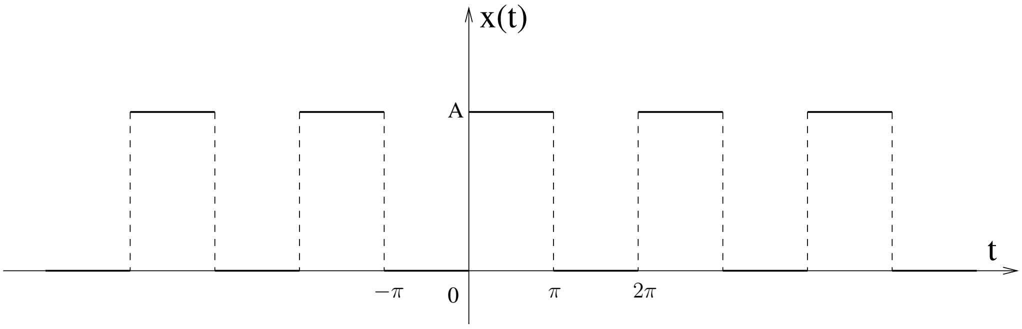
MEDIAN IN41 P10

Durée : 2 heures / tous les documents sont autorisés / Calculette simple conseillée
Les exercices suivants sont notés 19 points sur 20
+ 1 point pour la lisibilité de la présentation, la rigueur de la syntaxe et de l'orthographe

Exercise 1 *(5 pts)*

On considère le signal périodique représenté dans la figure ci-dessous:



1. Quelle est la période du signal T_0 ainsi que sa fréquence f_0.
2. En utilisant l'expression: $X(ik) = \dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-i2\pi k f_0 t}dt$, calculer les coefficients complexes $X(ik)$.
3. Tracer le spectre bilatéral d'amplitude et de phase du signal dans l'intervalle de fréquences $[-10f_0,\ +10f_0]$
4. En utilisant l'égalité de Parseval ($\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \parallel X(ik) \parallel^2 = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt$), donner la valeur de la somme : $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

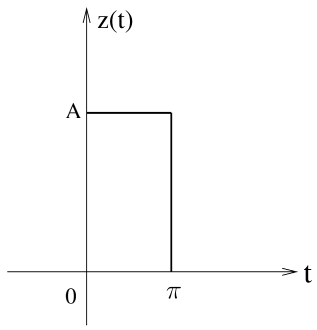
Exercise 2 *(5 pts)*

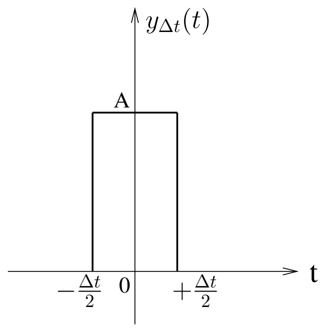
1. Donner (sans le démontrer) l'expression de la TF d'une porte rectangulaire (le signal $y_{\Delta t}(t)$ de la figure ci-dessous) d'amplitude A et de largeur Δt en fonction de A, Δt, π et la fréquence f.
2. Soit le signal $z(t)$ (voir figure ci-dessous). Donner l'expression de $Z(f) = TF\{z(t)\}$ en utilisant la définition de la transformée de Fourier ($Z(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} z(t).e^{-i2\pi f t}dt$)
3. Exprimer tout simplement $z(t)$ en fonction du signal y

M.Dridi

4. A partir des résultats trouvés en 1 et 3 et en utilisant les propriétés de la transformée de Fourier, retrouver le résultat de la question 2.

5. Tracer les spectres d'amplitude et de phase de $z(t)$.





Exercise 3 *(6 pts)*

Soit le signal analogique suivant :

$$x(t) = 2\cos(2\pi.200.t) + 5\cos(2\pi.500.t)$$

1. Montrer que la transformée de Fourier du signal $x(t)$ est donnée par :

$$X(f) = \frac{2\ \delta(f - f_1) + 5\ \delta(f - f_2) + 2\ \delta(f + f_1) + 5\ \delta(f + f_2)}{2}$$

avec f_1 et f_2 deux fréquences à déterminer.

2. Tracer alors le spectre bilatéral d'amplitude du signal $x(t)$

3. On désire échantillonner ce signal afin de le transporter sur un réseau. Quelle est la fréquence d'échantillonnage minimale qu'il faut choisir pour respecter le théorème de Shannon.

4. Le signal est échantillonné à une fréquence f_e. Donner l'expression générale du spectre du signal échantillonné $X_e(f)$ en fonction de f_e, δ, f_1, f_2

5. Tracer le spectre d'amplitude du signal échantillonné $X_e(f)$ pour $f_e = 600$ HZ.

6. Si elles existent, que valent les fréquences apparentes f_{app}?

7. Si on désire restituer les échantillons $x[n]$ à l'aide d'un convertisseur NA suivi d'un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = \frac{f_e}{2}$, que vaut le signal reconstruit $y(t)$?

Exercise 4 *(3 pts)*

Considérant la suite de quatre valeurs $x[n] = \{0, 2, 4, 0\}$.

1. Calculer les échantillons de la transformée de Fourier discrète $X(k)$

2. Tracer le spectre de la suite

M.Dridi