

Final IT40

Les documents autorisés sont les supports de cours distribués en amphi ainsi que les notes de cours et TD sous forme manuscrite. L'usage d'un dictionnaire pour les non-francophones est autorisé.

Exercice 1 : Des expressions régulières et des automates finis

On utilise l'alphabet $\Sigma = a \mid b \mid c$

Pour chacun des langages suivants, donner une expression régulière qui le décrit et dessiner un automate fini *le plus simple possible* qui le reconnaît (il n'est pas demandé un automate fini déterministe complet) :

1. langage des mots sur Σ qui contiennent, au moins une fois, deux consonnes identiques consécutives,
2. langage des mots sur Σ qui contiennent, au moins une fois, deux consonnes consécutives,
3. langage des mots sur Σ qui commencent et finissent par aa,
4. langage des mots sur Σ qui contiennent un nombre de voyelles qui n'est pas multiple de 3.

Exercice 2 : Un Automates Fini

On envisage l'automate fini suivant

		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
–	1		2	2
	2	2	2 5	2 5
	3	3	3	3
	4			5
	5	2 4 6	2	
	6	3		

1. Représenter graphiquement cet AF
2. Pour chacun des mots suivants, indiquer comment il est lu par l'AF puis indiquer s'il est accepté ou refusé

ε abba cabba cabbaaab

3. Par les procédés vus en cours, construire un AFdc équivalent¹ — on demande dans cette question de calculer la table de transitions de cet AFdc mais on ne demande pas de le dessiner.
4. Simplification de l'AFdc
 - (a) Justifier (ce qui demande un peu d'astuce mais aucun calcul!) que les trois états acceptants sont regroupables.
 - (b) Construire (en donnant sa table de transitions) l'AFdc obtenu après regroupement de ces trois états acceptants, puis démontrer (en cherchant les classes d'équivalence de HOPCROFT) que cet AFdc est minimal (qu'il n'existe pas d'automate avec moins d'état qui reconnaît le même langage).
 - (c) Proposer une expression régulière "simple" du langage reconnu en justifiant bien évidemment le résultat annoncé.

Exercice 2 : La tournée des randonneurs

Un groupe d'amis organise un trek de quelques jours dans le Jura. On a représenté par le graphe 1 les chemins par lesquels ils peuvent choisir de passer. Une arête entre deux sommets coïncide avec l'existence d'un chemin entre les deux sites. Les distances en kilomètres entre deux sites sont indiquées dans la matrice ci-dessous, La valeur ∞ signifie qu'il n'y a pas de chemin entre les deux sites.

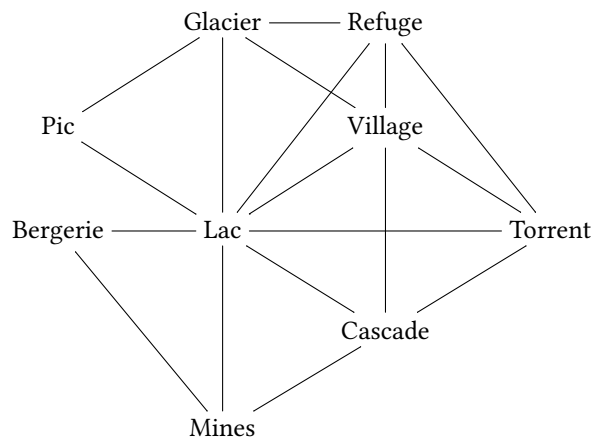
1. Partie 1 : Circuit et Chemin eulérien

- (a) Reprendre le graphe sur votre copie en utilisant seulement la première lettre du lieu visité, puis porter sur chaque arête du graphe la longueur associée².

1. Indication : on devrait obtenir un AFdc à 8 états parmi lesquels on n'oubliera pas le "blocage", autrement dit le "puits" ou la "poubelle"...

2. Vous pourrez vous aider du degré de chaque sommet...

- (b) Le groupe se retrouve au village et souhaite emprunter tous les chemins de randonnées une fois et une seule. Est-ce possible ? Justifiez votre réponse.



$$\begin{pmatrix}
 0 & \infty & 16 & \infty & 7 & \infty & 5 & 15 & \infty \\
 \infty & 0 & 16 & 7 & 18 & \infty & \infty & 12 & \infty \\
 16 & 16 & 0 & 12 & 12 & \infty & \infty & 5 & \infty \\
 \infty & 7 & 12 & 0 & \infty & \infty & \infty & 10 & 8 \\
 7 & 18 & 12 & \infty & 0 & \infty & \infty & 15 & \infty \\
 \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 5 & 5 \\
 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 12 & \infty \\
 15 & 12 & 5 & 10 & 15 & 5 & 12 & 0 & 3 \\
 \infty & \infty & \infty & 8 & \infty & 5 & \infty & 3 & 0
 \end{pmatrix}$$

FIGURE 1 – Chemins de randonnées autour du village et distances associées

- (c) Expliquer pourquoi il existe un chemin eulérien dans ce graphe. Quels sont les extrémités de ce chemin ?
 (d) Trouver ce chemin eulérien en utilisant la règle “Ordre alphabétique croissant”.
 (e) Comment faut-il compléter ce chemin pour que les randonneurs puissent revenir au village en minimisant le nombre de kilomètre parcourus ?

2. Partie 2 : Tournée de longueur minimale.

Peu avant leur départ, les randonneurs apprennent que le chemin entre le *Torrent* et la *Cascade* est impraticable suite à un éboulement. Ils décident de modifier leur parcours pour passer au moins une fois par tous les chemins en minimisant la distance parcourue.

- (a) Construisez par la méthode vue en cours le couplage minimum qu’ils doivent trouver.
 (b) En déduire les chemins qu’ils emprunteront plusieurs fois.

On ne vous demande pas de construire explicitement la tournée.