Median IT40

Le barème est donné à titre indicatif, la notation finale prendra en compte la longueur du sujet. Le seul document autorisé est une feuille A4 remplie par vos soins. L'usage de la calculatrice et d'un dictionnaire pour les non-francophones est autorisé.

Exercice 1 : Étude de deux Algorithmes (8 points)

On rappelle le théorème de la division euclidienne sur les entiers qui assure que pour tout couple d'entier $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que

$$a = bq + r \text{ et } r < b. \tag{1}$$

L'entier q est appelé le quotient de la division de a par b et r est appelé le reste.

1. On considère l'algorithme suivant qui prend en entrée un couple d'entiers $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et retourne un couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$.

Algorithme 1

div_euclide(a, b)
$q \leftarrow 0$
$r \leftarrow a$
while $r \geq b$ **do**
    $q \leftarrow q + 1$
    $r \leftarrow r - b$
end while
Return (q, r)

   (a) Prenons le couple $(a, b) = (8, 3)$. Déroulez l'algorithme à la main et en déduire ce que renvoie l'appel de div_euclide$(8, 3)$. Même question pour $(a, b) = (10, 5)$.

   (b) On note q_n, r_n les valeurs des variables q et r après le n-ième passage en boucle et q_0, r_0 les valeurs avant le premier passage. On considère la propriété suivante,

$$a = bq_n + r_n \qquad (\mathcal{P}_n). \tag{2}$$

   Montrer que $(\mathcal{P}_n)$ est un invariant de boucle.

   (c) Montrer que l'algorithme converge.

   (d) Conclure que l'algorithme calcule bien le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.

2. On considère maintenant un second algorithme

Algorithme 2

div_euclide2(a, b)
$n \leftarrow 0$
while $2^n b \leq a$ **do**
    $n \leftarrow n + 1$
end while
$\alpha \leftarrow 2^{n-1}$
$\beta \leftarrow 2^n$
for $k = 1$ to $n - 1$ **do**
    $\gamma \leftarrow \frac{\alpha+\beta}{2}$
    if $\gamma b \leq a$ **then** $\alpha \leftarrow \gamma$
    else $\beta \leftarrow \gamma$
    end if
end for
Return$(\alpha, a - b\alpha)$

On notera comme précédemment q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b. Le but des questions qui suivent est de montrer que $q = \alpha$ (où α est la valeur de la variable α en sortie de boucle **For**) et donc $r = a - b\alpha$.

(a) Justifier que la première boucle **While** permet de déterminer l'unique entier n tel que,

$$2^{n-1} \leq q < 2^n \tag{3}$$

(b) On note α_k et β_k les valeurs de α et β après le $k$ème passage dans la boucle **For** (et α_0 β_0 les valeurs avant le premier passage).

i. Montrer que pour tout $k \leq n-1$ on a

$$\beta_k - \alpha_k = \frac{\beta_{k-1} - \alpha_{k-1}}{2} \qquad (\mathcal{P}_k). \tag{4}$$

ii. En déduire qu'en sortie de boucle **For** on a $\beta_{n-1} - \alpha_{n-1} = 1$.

iii. Montrer par récurrence que pour tout $k \leq n-1$ on a $\alpha_k \leq q < \beta_k$.

iv. Conclure que $\alpha_{n-1} = q$.

Exercice 2 : Monômes premiers d'une fonction booléenne (6 points)

Soit $\mathcal{B} = \{0, 1\}$. On note x' le complément de x. On considère la fonction f de trois variables booléennes définie par :

$$\forall\,(x, y, z) \in \mathcal{B}^3 \quad f\,(x, y, z) = x'z' + x'yz + xy'z' + xyz + x'y'z.$$

1. Fournir une représentation dans l'espace qui fasse apparaître les points "couverts" par f, c'est-à-dire ceux où elle prend la valeur 1.
2. Déterminer l'ensemble des monômes inférieurs à f. Lesquels sont premiers ?
3. Montrer directement, sans utiliser le théorème de cours, que f est égale à la somme de ses monômes premiers. L'écriture est-elle optimale en termes de simplification ? Pourquoi ?

Exercice 3 : Enquête logique (6 points)

Lors d'une enquête, on a recueilli les témoignages de trois suspects :

Brown : "Jones est coupable et Smith est innocent".

Jones : "Si Brown est coupable, alors Smith l'est aussi."

Smith : "Je suis innocent mais au moins l'un des deux autres est coupable".

Ces trois témoignages seront notées B, J et S. En utilisant la convention :

p "Brown est coupable"

q "Jones est coupable"

r "Smith est coupable"

Répondre aux questions suivantes :

1. Exprimer le témoignage de chacun des suspects dans le langage de la logique propositionnelle.
2. Si tous disent vrai, lequel(s) est (sont) coupable(s) ? Vous écrirez les contraintes logiques et donnerez la (les) solution(s) de ces contraintes.
3. Dans cette partie, on ne suppose plus que les trois suspects disent nécessairement la vérité.
   (a) Faire une table de vérité avec p, q et r et en déduire les valeurs de vérité de B, J et S dans les 8 cas.
   (b) Un des témoignages se déduit des 2 autres, lequel ?
   (c) Si tous sont innocents, lequel(s) a (ont) menti ?
   (d) **Hors barème** Si tous les innocents disent vrai, lequel est coupable ?