

MEDIAN IT44

Durée : 2 heures

Le poly de cours et les calculatrices sont autorisées.

Les résultats intermédiaires non démontrés pourront être utilisés tout au long du devoir.

Le barème prendra en compte la longueur du sujet.

UTILISER UNE COPIE PAR EXERCICE

Exercice 1 – Interpolation polynomiale et choix des points d'interpolation

On considère sur l'intervalle $[-1, 1]$ la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

On admettra dans tout l'exercice que

$$|f^{(3)}(x)| \leq 5 \quad \text{pour tout } x \in [-1, 1].$$

Partie A – Interpolation sur le support équidistant $\{-1, 0, 1\}$

On note p_2 le polynôme d'interpolation de f sur le support $\{-1, 0, 1\}$.

1. Déterminer le polynôme p_2 dans la base de Newton.
2. En déduire une approximation de $f(\frac{1}{2})$.
3. Donner l'expression de l'erreur $e_2(x) = f(x) - p_2(x)$, puis établir un majorant de

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - p_2\left(\frac{1}{2}\right) \right|.$$

4. Comparer cette borne avec l'erreur réelle.

Partie B – Interpolation sur les trois points de Tchebychev

On considère maintenant les trois points de Tchebychev de l'intervalle $[-1, 1]$:

$$c_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On note q_2 le polynôme d'interpolation de f sur le support $\{c_0, c_1, c_2\}$.

5. Déterminer le polynôme q_2 dans la base de Lagrange.
6. En déduire une approximation de $f(\frac{1}{2})$.
7. Donner l'expression de l'erreur $\tilde{e}_2(x) = f(x) - q_2(x)$
puis établir un majorant de

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - q_2\left(\frac{1}{2}\right) \right|.$$

8. Comparer cette borne avec l'erreur réelle.

Partie C – Comparaison des deux choix de support

9. Comparer les approximations obtenues en A et B pour $f(\frac{1}{2})$.
10. Pour $S = \{x_0, x_1, x_2\}$, on note $\omega_S(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$. Déterminer ω_A et ω_B avec $A = \{-1, 0, 1\}$ et $B = \{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$.
11. Expliquer, à partir de la formule de l'erreur, pourquoi la comparaison des quantités $|\omega_A(x)|$ et $|\omega_B(x)|$ est essentielle pour juger de la qualité d'un support d'interpolation.
12. Montrer que

$$\omega_A(x) = x^3 - x \quad \text{et} \quad \omega_B(x) = x^3 - \frac{3}{4}x.$$

13. Vérifier que $\max_{x \in [-1, 1]} |\omega_B(x)| = \frac{1}{4}$.
14. Déterminer $\max_{x \in [-1, 1]} |\omega_A(x)|$.
15. Conclure sur le meilleur des deux supports pour la majoration de l'erreur.

Partie D – Recherche du meilleur support à trois points

Dans cette partie, on cherche à comprendre, de manière générale, pourquoi les points de Tchebychev sont les meilleurs.

16. Calculer $\omega_B(x)$ en $x = -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$.
17. On suppose qu'il existe un support $C = \{x_0, x_1, x_2\}$ tel que $\max_{x \in [-1, 1]} |\omega_C(x)| < \frac{1}{4}$. Pourquoi un tel support C , s'il existe, serait-il meilleur que le support de Tchebychev ?
18. Que peut-on dire du degré de $r = \omega_B - \omega_C$?
19. Quel est le signe de $r(x) = \omega_B(x) - \omega_C(x)$ en $x = -1, -1/2, 1/2, 1$.
20. En déduite que C n'existe pas.

Exercice 2 – Courbe de Bézier, hodographe et primitive

On considère dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe de Bézier cubique

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(t) = \sum_{k=0}^3 B_k^3(t) Q_k,$$

associée au polygone de contrôle

$$Q_0 = (2, -1), \quad Q_1 = (4, 2), \quad Q_2 = (6, 2), \quad Q_3 = (8, -1),$$

où

$$B_k^3(t) = \binom{3}{k} t^k (1-t)^{3-k}.$$

On note γ une courbe de Bézier de degré 4 dont g est l'hodographe.

Partie A – Étude directe de g

1. Établir les équations paramétriques explicites $x(t)$ et $y(t)$ de g .
2. Calculer $g(\frac{1}{2})$ par l'algorithme de de Casteljau.
3. Déterminer $g'(t)$, puis montrer que g admet une tangente horizontale pour une unique valeur de t , à préciser.
4. Montrer que g n'admet aucune tangente verticale.
5. Dresser le tableau de variation des coordonnées $x(t)$ et $y(t)$.
6. À l'aide de l'algorithme de de Casteljau graphique, placer le point $g(\frac{1}{2})$, puis faire un croquis précis de la courbe.

Partie B – Étude via l'hodographe h

7. Donner le polygone de contrôle de h .
8. À partir de la position de ces sommets, retrouver sans calcul supplémentaire :
 - le sens de variation de $x(t)$,
 - l'existence d'une unique tangente horizontale pour g ,
 - l'absence de tangente verticale.
9. Expliquer géométriquement pourquoi l'hodographe donne accès aux directions des tangentes à g .

Partie C – Étude de la courbe γ dont l'hodographe est g

On cherche une courbe de Bézier de degré 4,

$$\gamma(t) = \sum_{k=0}^4 B_k^4(t) P_k,$$

telle que g soit son hodographe, c'est-à-dire telle que

$$\gamma'(t) = 4\overrightarrow{Og(t)}.$$

10. En choisissant $P_0 = (0, 0)$, déterminer un polygone de contrôle $P = (P_0, \dots, P_4)$ pour γ .
11. Calculer $\gamma(\frac{1}{2})$ par l'algorithme de de Casteljau.
12. À partir des résultats obtenus sur g , dresser le tableau de variation de γ .
13. Déterminer en quel(s) point(s) la courbe γ possède une tangente horizontale.
14. Faire un croquis qualitatif de γ , en faisant apparaître le rôle joué par g .

