# Final IT4A

Prénom, NOM :

## PARTIE 1 : première copie

**Exercice 1.** *Comptages*

1. Quel est le nombre maximum d'arêtes dans un graphe *non orienté* possédant $n$ sommets ?

2. Quel est le nombre maximum d'arêtes dans un graphe *non-orienté et biparti* ?

3. Combien y a-t-il de graphes *non orientés à 4 sommets* ?

4. Généraliser au cas des graphes *non orientés à $n$ sommets.*

**Exercice 2** (*Partition d'un héritage*). On veut diviser en deux parties égales un héritage composé de $n$ biens insécables (oeuvres d'arts) de valeurs diverses exprimées en nombre entier. Le total des $n$ biens à partager vaut $B$ et chaque bien $i$ vaut $v_i \in \mathbb{N}$. Le but est de déterminer si une partition en deux ensembles **de même valeur totale** est possible. Il s'agit d'un problème de décision pour lequel la réponse est *vrai* ou *faux*.

Un exemple de $n = 5$ éléments à partager avec leur valeur est donné dans le tableau suivant :

| Élement $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Valeur $v_i$ | 1 | 9 | 5 | 3 | 8 |

Chaque élément doit être acquis en totalité et ne peut être divisé. Lorsqu'il y a beaucoup d'éléments à partager et de grande valeur, la solution ne semble pas toujours évidente à trouver, aussi pour résoudre le problème, nous proposons d'appliquer une approche de programmation dynamique. On note $f(i, Q)$, avec $1 \leq i \leq n$ et $0 \leq Q \leq B/2$, le prédicat qui vaut $V$ (vrai) si l'ensemble $1, \ldots, i$ contient un sous-ensemble de valeur totale exactement $Q$, et $F$ (faux) sinon.

1. À quelle condition sur $B$ le problème a-t-il une solution immédiate et triviale.

2. Préciser les conditions initiales sur le prédicat $f(1, Q)$ :

   $f(1, Q)$ si et seulement si $Q =$ _____ ou $Q =$ _____.

   Compléter maintenant la récurrence pour $i > 1$ :

   $f(i, Q)$ si et seulement si $f($_____, $Q)$ ou ($f($_____, _____) et $v_i \leq$ _____).

3. Considérant l'exemple ci-dessus, le tableau ci-dessous donne la première ligne ($i = 1$) des $f(i, Q)$. Compléter les lignes $i = 2$, $i = 3$, $i = 4$ et $i = 5$. Quelle case du tableau donne la solution du problème ?

| $f(i,Q) \setminus Q=$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$=1 | V | V | F | F | F | F | F | F | F | F | F | F | F | F |
| $i$=2 | | | | | | | | | | | | | | |
| $i$=3 | | | | | | | | | | | | | | |
| $i$=4 | | | | | | | | | | | | | | |
| $i$=5 | | | | | | | | | | | | | | |

4. La réponse pour l'exemple est-elle vrai (V) ou fausse (F). Quels éléments faut-il sélectionner dans la partition ? Détailler la remontée des choix.

5. On apprend que l'élément 5 a déjà été vendu et est retiré de la succession. En réutilisant le tableau de la question 3, indiquer quelle case du tableau correspond à la réponse, donner la nouvelle partition si elle existe et sa composition.

6. **Complexité algorithmique.** Cette question analyse la complexité en temps des deux approches, en fonction de $n$ (nombre de biens) et de $B$ (valeur totale de l'héritage). On rappelle que le tableau $f$ possède $n$ lignes et $B/2+1$ colonnes.

   (a) *Programmation dynamique.* Pour déterminer le nombre total d'opérations élémentaires, on pourra procéder ainsi :
   - compter le nombre de cases du tableau $f$ ;
   - d'après la récurrence de la question 2, combien d'opérations élémentaires faut-il pour calculer une case à partir des cases voisines déjà remplies ? On justifiera que ce nombre est constant (indépendant de $n$ et de $B$) ;
   - en déduire le nombre total d'opérations en fonction de $n$ et $B$, et donner le résultat en notation $O$.

   (b) *Algorithme de force brute.* On énumère tous les sous-ensembles possibles d'éléments, et pour chacun d'eux, on calcule sa valeur totale et on la compare à $B/2$.
   - combien y a-t-il de sous-ensembles d'un ensemble à $n$ éléments ?
   - quel est le coût (en nombre d'opérations) du calcul de la valeur totale d'un sous-ensemble, en fonction de $n$ ?
   - en déduire le nombre total d'opérations, en notation $O$.